

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Escuela Politécnica Superior
Departamento de Ingeniería Mecánica



Estudio numérico de la propagación de fisuras en ejes rotativos mediante XFEM

Trabajo de Fin de Grado

Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales

Autor: José María Luna Buendía
Directora: María Belén Muñoz Abella
Leganés, Junio de 2014

Agradecimientos

*Gracias a María Belén Muñoz Abella
por aconsejarme y ayudarme en todo
momento.*

*A mis padres y hermanos por su apoyo
y comprensión.*

*Y no por último menos importante,
muy especialmente, gracias a TI.*

Resumen

El campo de la Mecánica de Fractura ha adquirido en los últimos años un papel fundamental en el diseño y desarrollo de elementos mecánicos, que se ven sometidos a esfuerzos cíclicos y en los cuales el fenómeno de la fatiga supone el principal requisito de diseño. Tener la capacidad de predecir el crecimiento de las fisuras presentes en estos elementos, resulta fundamental para garantizar la seguridad durante su vida útil, así como para alargar esta última.

El nacimiento y posterior desarrollo de los métodos numéricos de cálculo han permitido el avance en este campo. Poco a poco se han ido desarrollando nuevas técnicas que permitieran un estudio cada vez más preciso de los mecanismos de fractura. Una de las más novedosas es el Método de los Elementos Finitos eXtendido, también conocido como XFEM.

Con esta novedosa técnica es posible estudiar la creación y desarrollo de fisuras sin importar la complejidad geométrica tanto de la pieza o de la fisura. Todo ello permite superar las limitaciones que presentaba el MEF tradicional. La complejidad de esta nueva técnica es considerable, no solo por la dificultad de alcanzar la convergencia en algunas ocasiones sino también por la necesidad de conocer profundamente los mecanismos de fractura.

En este Trabajo Fin de Grado se ha desarrollado por primera vez un modelo numérico tridimensional que, mediante XFEM, permite estudiar la propagación de fisuras en ejes giratorios en condiciones cuasiestáticas. Además, para simplificar lo máximo posible el proceso de modificación de variables en el modelo, se ha realizado una aplicación en el entorno de Abaqus que permite automatizar este proceso. En última instancia se han comparado los resultados obtenidos con los ofrecidos por la literatura. Además se comparan entre sí las dos alternativas que ofrece el código Abaqus para este tipo de problemas: la de los modelos cohesivos CZM, y la que se basa en la Mecánica de Fractura Elástico Lineal LEFM.

Abstract

The field of Fracture Mechanics has played in recent times a vital role in the design and development of mechanic elements which have to withstand cyclic forces and thus making fatigue to be the main design requirement. Hence, being able to predict the growth of the crack located in these elements, turns out to be essential in order to ensure safe operation during its service life along with enhance service life itself.

The very founding and the further development of numeric methods has enabled the constant breakthrough of this field. Little by little, new techniques have been developing thus allowing increasingly accurate studies as to the fracture mechanisms to be performed. The latest is the eXtended Finite Element Method, better known as XFEM.

This novel method gives us the possibility to study not only the onset but also the growth of cracks however complex the geometry both the cracked body and the crack itself is. All this enable to overcome the limitations of FEM when it comes to this issue. The complexity of this new technique is huge. Not only is it difficult to make the problem to converge and get proper results but also a deep understanding and knowledge about the fracture mechanism is required in order to solve the problems that arise through the process.

Within this Project, a 3D XFEM numeric model has been developed from scratch so as to study the growth of cracks in rotary shafts in quasistatic conditions. Besides, for the sake of simplicity when it comes to modify the big amount of parameters involved, a custom application within Abaqus environment has been built which automates the whole process and thus helping save time. Eventually, the results have been discussed in contrast to the ones appearing in other researches. In addition to this, the two alternatives, the first one based on the Linear Elastic Fracture Mechanics and the second one based on the Cohesive Zone Model, within Abaqus have been compared.

Índice

Agradecimientos.....	3
Resumen	5
Abstract.....	7
Índice	9
Índice de figuras.....	13
Índice de tablas	19
1 Introducción.....	21
1.1 Motivación	22
1.2 Objetivos	22
1.3 Organización del documento	23
2 Mecánica del daño	25
2.1 Mecánica de Fractura	26
2.1.1 Mecánica de Fractura Elástico-Lineal	26
2.1.2 Mecánica de Fractura Elasto-Plástica	33
2.2 Modelos de Zona Cohesiva	35
2.2.1 Ley de Tracción-Separación	37
3 Fatiga	41
3.1 Introducción	42
3.2 Ensayos de fatiga	42
3.2.1 Diagramas de fatiga: curvas S-N	44
3.2.2 Coeficientes modificativos del límite de fatiga	46
3.3 Fatiga con tensiones medias no nulas	52
3.4 Modelos de propagación de fisuras de fatiga	55
3.5 Aplicación a ejes rotativos fisurados	59
3.5.1 Geometría y comportamiento de la fisura	59
3.5.2 Modelos de propagación de fisuras en ejes	63

4	Métodos y herramientas de cálculo numérico	65
4.1	Método de los Elementos Finitos	66
4.1.1	Conceptos básicos del MEF	66
4.1.2	Aplicación a problemas estructurales de elasticidad tridimensional	67
4.2	Método de los Elementos Finitos Extendido	72
4.2.1	Funciones de enriquecimiento	74
4.2.2	Funciones de enriquecimiento de Heaviside	74
4.3	Modelización de fisuras con XFEM en Abaqus	75
4.3.1	Introducción a Abaqus	76
4.3.2	Definición e implementación de los enriquecimientos	79
4.3.3	Definición e implementación de los mecanismos de daño	85
4.3.4	Visualización de los resultados	112
5	Desarrollo de la aplicación	115
5.1	Introducción	116
5.2	Desarrollo de la aplicación	116
5.2.1	Paso 1	117
5.2.2	Paso 2	118
5.2.3	Paso 3	120
5.2.4	Paso 4	121
5.2.5	Paso 5	123
5.2.6	Paso 6	123
5.3	Código en Python de la aplicación	124
6	Modelo numérico	125
6.1	Introducción	126
6.1.1	Tamaño de fisura $a/D = 0.1$	127
6.1.2	Tamaño de fisura $a/D = 0.2$	133
6.1.3	Tamaño de fisura $a/D = 0.3$	137
6.1.4	Tamaño de fisura $a/D = 0.4$	141
6.2	Discusión de resultados	146
7	Planificación y presupuesto	151
7.1	Planificación	152
7.2	Presupuesto	153
7.2.1	Amortización de equipos y licencias de software	153

7.2.2 Honorarios de personal	154
8 Conclusiones y desarrollos futuros	155
8.1 Resumen final y conclusiones	156
8.2 Desarrollos futuros	156
Bibliografía	159

Índice de figuras

Figura 2.1: Sistema de coordenadas y estado tensional de un elemento cercano al frente de grieta.	28
Figura 2.2: Modos puros de fractura: de izquierda a derecha apertura (modo I), cortadura (modo II) y cizalladura (modo III). (4)	29
Figura 2.3: Distribución de tensiones en el frente de grieta mostrando la solución singular en el origen (4)	31
Figura 2.4: Primera aproximación del tamaño de la zona plástica en el frente de grieta	31
Figura 2.5: Embotamiento del frente de grieta en materiales dúctiles (4)	34
Figura 2.6: Comparación de la energía elástica almacenada por un material elástico lineal y otro no lineal.....	35
Figura 2.7: División de la grieta en real y ficticia y valores de tensión en el entorno del frente de grieta.....	36
Figura 2.8: Escala atómica de las dos partes de la grieta.....	36
Figura 2.9: Gráfica Tracción-Separación indicando las etapas de la evolución del daño y otros parámetros característicos	37
Figura 2.10: Modelos de gráfica Tracción-Separación (a) polinómico de grado 3, (b) trapezoidal, (c) trapezoidal suavizado (d) exponencial, (e) lineal y (f) bilineal (12)	38
Figura 2.11: Representación gráfica de las ecuaciones 2.27 y 2.28 adimensionalizadas (14)	39
Figura 3.1: Máquina de Moore para ensayos de probeta rotatoria	43
Figura 3.2: Tensión cíclica alternante (tensión media nula)	44
Figura 3.3: Representación de la curva S-N de un material que presenta límite de fatiga	44
Figura 3.4: Comparación de materiales con y sin límite de fatiga.....	45
Figura 3.5: Factor de acabado superficial en función del acabado superficial y la resistencia última del acero o de su dureza (27).....	47
Figura 3.6: Factor de sensibilidad a las ranuras para cargas de flexión y axiales alternantes (29).....	50
Figura 3.7: Factor de sensibilidad a las ranuras para cargas torsión alternantes (29)	50
Figura 3.8: Valores de K_t para esfuerzo axial en eje con entalla (29)	51
Figura 3.9: Valores de K_t para esfuerzo de torsión en eje agujereado (29).....	51
Figura 3.10: Comparación de la curva S-N antes (negra) y después (roja) de la aplicación de los factores de corrección de la ecuación de Marin.	52

Figura 3.11: Tensión cíclica alternante con tensión media no nula	53
Figura 3.12: Criterios para el fallo por fatiga con tensiones medias no nulas para N ciclos	54
Figura 3.13: Representación gráfica de la evolución de la fisura en términos de la velocidad de crecimiento de la misma (4)	56
Figura 3.14: Evolución de fisuras de fatiga en ejes (37)	60
Figura 3.15: Representación de los parámetros que caracterizan la geometría de una fisura de frente semielíptico y de la sección del eje en la que se encuentra	60
Figura 3.16: Comportamiento de apertura y cierre de la fisura según Darpe et al. (46)	62
Figura 3.17: Resultados mediante MEF para el proceso de apertura y cierre de la fisura según Bachschmid et. al (47)	62
Figura 3.18: Desarrollo de la fisura semielíptica previsto por Carpinteri (37)	63
Figura 4.1: Adaptación de la malla a la topología de la fisura	73
Figura 4.2: Fisura en una malla estructurada (izquierda) y no estructurada (derecha) (63)	73
Figura 4.3: Representación independiente de la grieta y elemento fisurado en XFEM (65)	73
Figura 4.4: Enriquecimiento en los nodos del elemento en que se encuentra el frente de grieta.....	74
Figura 4.5: Enriquecimiento de Heaviside en los nodos de los elementos alejados del frente de grieta.....	75
Figura 4.6: Ventana principal de Abaqus/CAE.....	76
Figura 4.7: Esquema del funcionamiento interno de Abaqus	77
Figura 4.8: Detalle de la GUI de Abaqus/CAE: módulos.....	78
Figura 4.9: Comportamiento de los nodos fantasmas durante la fractura de un elemento al propagarse la grieta (70)	80
Figura 4.10: Creación del enriquecimiento dentro del modulo <i>Interaction</i>	81
Figura 4.11: Asignar un nombre al enriquecimiento	82
Figura 4.12: Grieta estacionaria	82
Figura 4.13: Grieta móvil	83
Figura 4.14: Seleccionar el dominio por el que se propagará la grieta	83
Figura 4.15: Especificar las propiedades del contacto.....	84
Figura 4.16: Seleccionar el dominio que constituye la grieta	85
Figura 4.17: Detalle del Módulo <i>Property. Create Material y Material Manager</i>	86
Figura 4.18: Detalle del <i>Material editor</i> . Selección de un material elástico	86
Figura 4.19: Parámetros requeridos para definir el comportamiento de un material elástico isótropo	87
Figura 4.20: Selección del criterio de inicio del daño siguiendo la TSL	88

Figura 4.21: Parámetros a introducir en el caso de seleccionar <i>Maxps Damage</i> como criterio de inicio del daño	89
Figura 4.22: Parámetros a introducir en el caso de seleccionar <i>Maxpe Damage</i> como criterio de inicio del daño	90
Figura 4.23: Parámetros a introducir en el caso de seleccionar <i>Maxs Damage</i> o <i>Quads Damage</i> como criterios de inicio del daño	90
Figura 4.24: Parámetros a introducir en el caso de seleccionar <i>Maxe Damage</i> o <i>Quade Damage</i> como criterios de inicio del daño	91
Figura 4.25: Detalle <i>Edit Material</i> : seleccionar la dirección de propagación de la fisura en el caso de seleccionar <i>Quade Damage</i> , <i>Maxe Damage</i> , <i>Quads Damage</i> o <i>Maxs Damage</i> como criterios de inicio del daño.	92
Figura 4.26: Curva Tracción-Separación de evolución lineal del daño	93
Figura 4.27: Detalle del <i>Material editor</i> para seleccionar la evolución del daño tras haber seleccionado uno de los criterios de inicio del mismo	94
Figura 4.28: Definición de la evolución del daño basado en el desplazamiento efectivo	95
Figura 4.29: Implementación de la evolución lineal, exponencial o tabular del daño ..	96
Figura 4.30: Gráfica Tracción-Separación con una evolución exponencial del daño...	97
Figura 4.31: Parámetros necesarios para caracterizar la evolución lineal del daño	97
Figura 4.32: Parámetros necesarios para definir una evolución tabular del daño	98
Figura 4.33: Tipos de comportamiento en modo mixto basado en desplazamientos....	98
Figura 4.34: Parámetros requeridos para una descripción tabular del modo mixto de fractura.....	99
Figura 4.35: Definición de la evolución del daño basado en energías	100
Figura 4.36: Tipos de comportamiento en modo mixto basado en energías	101
Figura 4.37: Parámetros requeridos para caracterizar el comportamiento en modo mixto según la Ley de Potencias	103
Figura 4.38: Introducir el exponente de la Ley de Potencias.....	103
Figura 4.39: Definición del índice de modo mixto en términos de energía o de tracciones.....	105
Figura 4.40: Coeficiente viscoso para facilitar la convergencia de las ecuaciones	106
Figura 4.41: Detalle ventana <i>Edit Crack. Creation Property Interaction</i>	107
Figura 4.42: Detalle del Módulo <i>Interaction. Creation Property Interaction y Property Interaction Manager</i>	107
Figura 4.43: Detalle ventana <i>Edit Contact Property</i> . Seleccionar criterio de fractura ..	108
Figura 4.44: Parámetros para caracterizar el criterio de fractura mediante XFEM basado en la MFEL y utilizando la VCCT	109
Figura 4.45: Seleccionar dirección del crecimiento de la grieta	110

Figura 4.46: Seleccionar comportamiento en modo mixto de fractura.....	110
Figura 4.47: Parámetros requeridos para caracterizar el comportamiento en modo mixto según la Ley de Benzeggagh-Kenane	111
Figura 4.48: Parámetros requeridos para caracterizar el comportamiento en modo mixto según la Ley de Potencias	111
Figura 4.49: Parámetros requeridos para caracterizar el comportamiento en modo mixto según la Ley de Reeder	112
Figura 4.50: Seleccionar PHILSM en la ventana <i>Edit Field Output Request</i>	113
Figura 4.51: Detalle <i>Edit Field Output Request</i> . Seleccionar STATUSXFEM	114
Figura 5.1 Detalle de la pantalla principal de la aplicación: Módulo XFEM	116
Figura 5.2 Paso 1 de la aplicación: definir geometría del eje y de la fisura	117
Figura 5.3 Particiones longitudinales en el eje.....	118
Figura 5.4 Particiones transversales en el eje (arriba) y fisuras (abajo). De izquierda a derecha: fisura de frente recto $a/D = 0.25$, $a/b = 0$, , semicircular $a/D = 0.25$, $a/b = 1$ y semi-elíptico $a/D = 0.25$, $a/b = 0.5$	118
Figura 5.5 Paso 2 de la aplicación: selección del material y del modelo de daño	119
Figura 5.6 Assembly entre el eje y la fisura en su posición definitiva	120
Figura 5.7 Paso 3 de la aplicación: características de las fuerzas	120
Figura 5.8 Esquema de fuerzas y coacciones en el eje. Detalles de los apoyos y el punto de aplicación de la carga.....	121
Figura 5.9 Paso 4 de la aplicación: mallado del eje segun disferenteas alternativas... ..	122
Figura 5.10 Mallado automático de la sección transversal de un eje con una fisura semi-elíptica $a/D = 0.5$, $a/b = 0.5$	123
Figura 5.11 Paso 5 de la aplicación: crear y lanzar el job	123
Figura 6.1 Intervalos en los que se mostraran los resultados en los casos estudiados ...	127
Figura 6.2 Leyendas S33 en Pascuales (izquierda) y STATUSXFEM (derecha) para $a/D = 0.1$	128
Figura 6.3 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.1$ mediante MFEL	130
Figura 6.4 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.1$ mediante MFEL ..	130
Figura 6.5 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.1$ mediante CZM.....	132
Figura 6.6 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.1$ mediante CZM ...	132
Figura 6.7 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.2$ mediante MFEL	135
Figura 6.8 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.2$ mediante MFEL ..	135
Figura 6.9 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.2$ mediante CZM.....	136
Figura 6.10 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.2$ mediante CZM .	137
Figura 6.11 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.3$ mediante MFEL	140
Figura 6.12 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.3$ mediante MFEL	140

Figura 6.13 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.3$ mediante CZM.....	141
Figura 6.14 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.3$ mediante CZM.	141
Figura 6.15 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.4$ mediante MFEL	144
Figura 6.16 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.4$ mediante MFEL	145
Figura 6.17 Posiciones de fisura cerrada (arriba) y abierta (abajo)	145
Figura 6.18 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.4$ mediante CZM	146
Figura 6.19 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.4$ mediante CZM.	146
Figura 6.20 Representación de la trayectoria que recorre la sección central durante el giro	147
Figura 6.21 Elementos distorsionados en la sección transversal de una fisura $a/D = 0.1$	148
Figura 6.22 Representación de la tensión según el criterio de Von Mises en el primer incremento del <i>step</i> para los distintos tamaños de fisura estudiados. De izquierda a derecha $a/D = 0.1$, $a/D = 0.2$, $a/D = 0.3$ y $a/D = 0.4$	148
Figura 6.23 Tensiones de tracción y compresión en la sección fisurada para los distintos tamaños de fisura estudiados en el caso de fisura abierta (arriba) y cerrada (abajo)	149
Figura 6.24 Desarrollo del frente de grieta de fisuras de frente casi-recto sometidas a flexión alternante (78)	150
Figura 7.1 Diagrama de Gantt del proyecto	152

Índice de tablas

Tabla 3.1	47
Tabla 3.2	49
Tabla 3.3	60
Tabla 4.1	79
Tabla 7.1	152
Tabla 7.2	154
Tabla 7.3	154

1

Introducción

1.1 Motivación

Los estudios e investigaciones acerca del comportamiento de ejes rotativos fisurados no han hecho más que crecer cuantitativa y cualitativamente desde que se publicaron los primeros trabajos hace más de 50 años. Numerosos son los logros alcanzados durante estos años. El conocimiento del comportamiento dinámico de ejes fisurados ha permitido reconocer la presencia de fisuras en estos elementos con la suficiente antelación como para evitar roturas catastróficas. Tras la inspección de ejes reemplazados, se han observado fisuras que se extendían hasta una profundidad de casi el radio del eje en cuestión, lo que obviamente supone una situación crítica.

Esta denominación de catastrófica habla a las claras de la magnitud de las consecuencias que una rotura de este tipo puede acarrear. El fallo de un eje principal en el rotor de una turbina de una central de generación de energía eléctrica, puede provocar enormes pérdidas económicas debido a daños ocasionados en la planta, así como la pérdida de la producción durante la reparación o incluso la reconstrucción de la central. Estos costes pueden reducirse enormemente reemplazando el eje en el momento adecuado, de tal forma que el riesgo de fallo sea admisible. Sin embargo, las pérdidas económicas pasan a ser secundarias cuando vidas humanas entran en juego. Se trata, por ejemplo, de medios de transporte como el ferrocarril, en el que un fallo en los ejes puede ser la causa de un fatal descarrilamiento. Mediante estos dos ejemplos, se demuestra el interés práctico que el estudio del desarrollo de fisuras en general y en ejes en particular, levanta entre la comunidad científica.

El presente Trabajo se incluye de este modo en la línea de investigación abierta en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Carlos III de Madrid, centrada en el estudio y detección de defectos en rotores. Con este Trabajo se pretende ofrecer una primera aproximación al XFEM y presentarlo como una herramienta útil en futuros desarrollos del departamento y en la citada línea de investigación.

1.2 Objetivos

En relación con lo expuesto en el apartado anterior, se establece el objetivo principal del presente Trabajo Fin de Grado, que consiste en estudiar, por primera vez, la propagación de fisuras en ejes giratorios en condiciones cuasiestáticas mediante el Método de los Elementos Finitos eXtendido (XFEM), para lo que se desarrollará un modelo numérico tridimensional parametrizado mediante el código comercial Abaqus/Standard.

Como pasos intermedios en el camino de alcanzar este objetivo principal se encuentran los objetivos parciales que se detallan a continuación:

- Realizar una exhaustiva revisión bibliográfica de las distintas materias relacionadas con el presente Trabajo (Mecánica de la Fractura aplicada a ejes rotatorios, Método de los Elementos Finitos eXtendido XFEM y programación en el entorno de Abaqus/Standard). Este primer paso es básico, debido a que es ne-

cesario conocer en profundidad el problema que se quiere tratar por la complejidad del método elegido para abordarlo.

- Crear una aplicación en el entorno Abaqus, mediante el lenguaje de programación Python, que permita, por una parte, parametrizar las propiedades y condiciones de funcionamiento del eje estudiado y, por otra, simplificar al máximo el proceso de creación del modelo numérico, guiando al usuario durante el desarrollo completo del mismo.
- Estudiar la propagación de una fisura en un eje rotatorio, variando la profundidad de la misma, mediante XFEM, y comparar, además, las dos alternativas que ofrece el código Abaqus para este tipo de problemas: la de los modelos cohesivos CZM y la que se basa en la Mecánica de Fractura Elástico Lineal LEFM.
- Comparar los resultados proporcionados por el modelo numérico utilizado con otros que se pueden encontrar en la literatura.

1.3 Organización del documento

El documento se divide en 8 capítulos, correspondiendo el primero a la presente introducción.

En el segundo capítulo se realiza una revisión de los conceptos más importantes de la mecánica del daño, incluyendo las dos corrientes de la Mecánica de Fractura y los Modelos Cohesivos.

En el tercer capítulo se dedica al fenómeno de la fatiga. Además se exponen consideraciones importantes en cuanto a la dinámica de ejes rotativos fisurados.

En el cuarto capítulo se introducen los procedimientos numéricos de cálculo, presentando y comparando el FEM con el XFEM así como la implementación de este último en el código comercial Abaqus y la programación necesaria.

En el quinto capítulo se detalla el funcionamiento de la aplicación desarrollada así como aspectos comunes a los distintos modelos creados para los casos de estudio.

En el sexto capítulo se expone, en primer lugar, los resultados del estudio numérico realizado para los distintos casos. Tras ello se procede a un análisis crítico de los resultados comparándolo con modelos de referencia en la bibliografía.

En el séptimo capítulo se introduce la planificación del Trabajo así como su inserción en el entorno socioeconómico actual mediante la elaboración de un presupuesto.

Por último, el capítulo octavo se reserva para las conclusiones al Trabajo realizado y se describen posibles desarrollos futuros.

2

Mecánica del daño

2.1 Mecánica de Fractura

Desde su nacimiento a comienzos del siglo XX, la Mecánica de Fractura ha experimentado un espectacular desarrollo, especialmente en las últimas décadas debido a la búsqueda de un incremento en la vida útil de componentes mecánicos con aplicaciones diversas. Esta disciplina de la Ingeniería Mecánica se encarga del estudio de la estabilidad estructural de los materiales en condiciones caracterizadas por la presencia de defectos (fisuras o grietas principalmente), que actúan como concentradores de tensiones. El estudio del origen y la propagación de estos se vuelve fundamental a la hora de determinar la resistencia de un material a fractura, establecer coeficientes de seguridad adecuados para estructuras críticas y optimizar los procesos de fabricación para reducir al máximo el número de defectos creados.

El concepto básico de la Mecánica de Fractura consiste en relacionar las condiciones de carga aplicadas en el elemento fisurado y la resistencia del material al crecimiento de fisura y su fractura. El fallo se producirá si la resistencia del material a fractura, con la presencia de una fisura, es menor que el estado de tensión-deformación que generan las cargas aplicadas en la geometría del sólido.

Los primeros estudios en este campo se centraron en el estudio de materiales idealmente frágiles con muy reducida deformación a rotura y que dieron lugar a la aparición de la Mecánica de Fractura Elástico-Lineal. No obstante, la importancia industrial de los metales, provocó el desarrollo de teorías válidas para materiales que presentan una rotura dúctil con niveles notables de deformación plástica, como la Mecánica de Fractura Elasto-Plástica. Ambas teorías serán presentadas a continuación.

2.1.1 Mecánica de Fractura Elástico-Lineal

Los conceptos de la Mecánica de Fractura establecidos con anterioridad a 1960 únicamente pueden ser aplicados a materiales cuyo comportamiento sigue la Ley de Hooke y consecuentemente a estructuras en régimen elástico lineal. A partir de esta fecha, la Mecánica de Fractura se desarrolló teniendo en cuenta diversas formas de comportamiento no lineal (plasticidad, viscoplasticidad o viscoelasticidad) o efectos dinámicos. No obstante, todos estos desarrollos consisten en extensiones de la Mecánica de Fractura Elástico Lineal (MFEL). Esta constituye la primera teoría desarrollada específicamente para explicar la propagación de grietas y la fractura de componentes. Su principal aplicación es el estudio de materiales idealmente frágiles que presentan fisuras agudas.

Las primeras evidencias cualitativas del efecto concentrador de tensiones de las grietas fueron establecidas por Inglis (1) quien en 1913 analizó el comportamiento de placas planas con agujeros elípticos. Sus estudios le llevaron a establecer una expresión para el cálculo de la tensión en el extremo de la grieta esbelta σ_A (ver ecua-

ción 2.1). Si a y b son los semiejes mayor y menor respectivamente de la fisura elíptica, una grieta esbelta es aquella en que se cumple que $a \gg b$:

$$\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

2.1

donde ρ es el radio de curvatura. No obstante, según esta expresión, en una fisura aguda en la que $\rho \rightarrow 0$ el fallo del material se produciría al aplicar una tensión σ infinitesimal ya que no existe ningún material que soporte tensiones infinitas. Este hecho causó una gran preocupación cuando se descubrió y animó a Griffith (2) a desarrollar su planteamiento en términos energéticos. De hecho sería Griffith (2) quien en 1924 establecería la teoría inicial en que se sustenta la Mecánica de Fractura, a partir de sus estudios realizados sobre probetas de vidrio. De acuerdo con el Primer Principio de la Termodinámica¹, afirmó que una grieta preexistente crecerá si la energía requerida para propagar la fisura (suma del trabajo desarrollado por la tensión aplicada y la energía elástica liberada al extenderse la grieta) puede ser suministrada por el sistema. Con este nuevo enfoque ofreció una expresión para el cálculo de la tensión de fractura de un elemento agrietado, que se escribe como:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2 E \gamma_s}{\pi a}}$$

2.2

donde E y γ_s representan el Módulo de Elasticidad y la energía superficial del material respectivamente.

Las conclusiones alcanzadas por Griffith (2) en cuanto a tensiones de fractura de un material fisurado se muestran consistentes frente a estudios a escala atómica, en las que se calculan las fuerzas de rotura del enlace interatómico. También alcanzó un buen compromiso entre los valores experimentales de resistencia a fractura y los valores que ofrece su ecuación 2.2 en el caso de vidrios y cerámicas. Sin embargo en el caso de materiales dúctiles, la deformación plástica en el frente de grieta hace que el modelo de Griffith (2) no represente de forma veraz su comportamiento a fractura. Es necesario introducir el fenómeno de la deformación plástica en el balance energético.

En el caso de los metales, la propagación de una fisura no puede explicarse únicamente por la rotura de enlaces atómicos, que es precisamente lo que refleja γ_s en la ecuación 2.2, sino que se produce el desplazamiento de dislocaciones en los alrededores del extremo de la grieta, originando la disipación de una energía plástica adicional. Así Irvin (3) en 1948 modificó la expresión de Griffith (2) incluyendo este comportamiento, quedando representada por:

¹ Cuando un sistema pasa de un estado de no equilibrio a otro de equilibrio, se produce una disminución de la energía del mismo.

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2 E (\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}}$$

2.3

donde γ_p es el trabajo plástico por unidad de área y que en general presenta valores superiores a γ_s . No obstante, la aplicación de estas teorías implica suponer que los efectos de la plasticidad se limitan a una pequeña zona en el frente de la fisura.

Finalmente, en 1956, el propio Irvin propuso una alternativa que permite extender el modelo de Griffith a los metales. Para ello acuñó el concepto de tasa de liberación de energía G , la cual da una medida de la energía disponible para la propagación de la grieta. Más adelante, durante el estudio energético de la fractura (ver apartado 2.1.1.2) se ampliará este concepto.

2.1.1.1 Planteamiento local de la fractura

El concepto de partida de la Mecánica de Fractura consiste en considerar que el fenómeno de la fractura tiene lugar en una zona limitada situada alrededor del frente de la fisura. El resto del sólido, mientras tanto, mantiene un comportamiento elástico lineal. Simplificando el problema a un caso plano, las ecuaciones de la elasticidad permiten determinar el estado tensional de un elemento diferencial que se encuentra delante de la grieta en una posición genérica definida en coordenadas polares por un ángulo θ y un radio r (ver Figura 2.1).

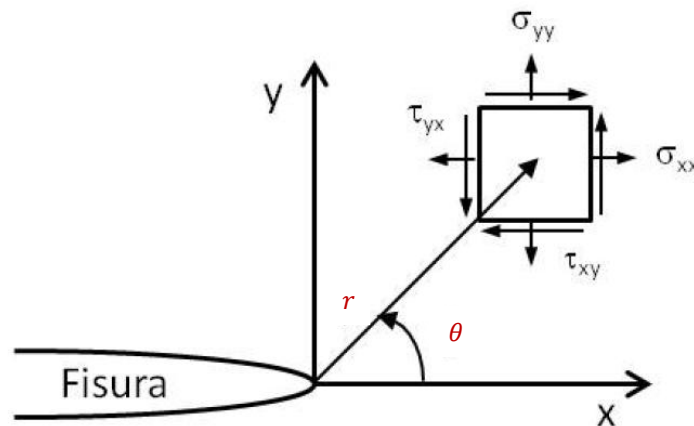


Figura 2.1: Sistema de coordenadas y estado tensional de un elemento cercano al frente de grieta.

El estado tensional de una grieta en un sólido puede presentar tres modos diferentes de fallo (ver Figura 2.2). En el modo I (apertura) las tensiones y los consecuentes desplazamientos son perpendiculares al plano que contiene la fisura. En el modo II (cortadura), en cambio, tanto las tensiones como los desplazamientos de la fisura se sitúan en planos paralelos al que la contiene, coincidiendo la dirección de propagación con la de la carga aplicada. Por último, en el modo III (cizalladura) la propaga-

ción de la fisura se produce en dirección perpendicular al de la aplicación de la carga, a pesar de que las tensiones y desplazamientos se producen en el mismo plano de la fisura.

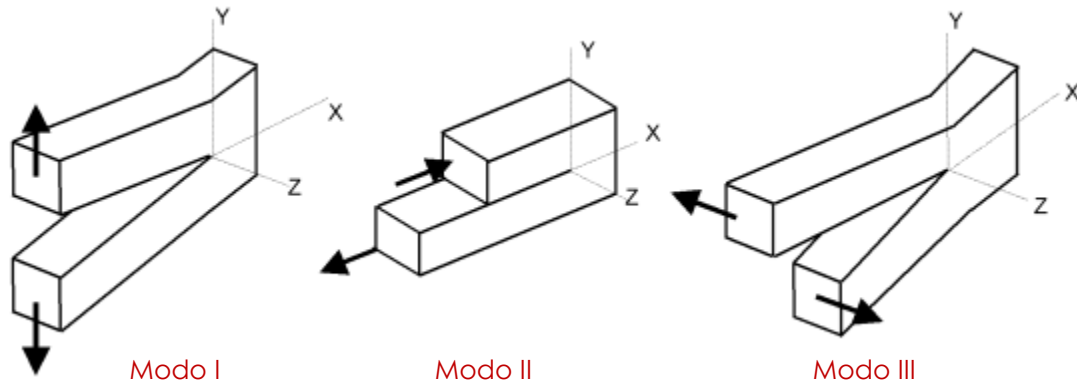


Figura 2.2: Modos puros de fractura: de izquierda a derecha apertura (modo I), cortadura (modo II) y cizalladura (modo III). (4)

Los tres modos pueden aparecer tanto de forma individual o como superposición de varios de ellos. No obstante, el modo predominante y más habitual es el I ya que supone la orientación más favorable para el desarrollo de la fisura y las menores tensiones de corte. El modo II es el menos frecuente y el III es propio de sólidos con fisuras sometidos a esfuerzos de torsión.

Suponiendo el caso más frecuente (modo I, que será utilizado en el presente Trabajo), las componentes del tensor de tensiones y de desplazamientos de este elemento homogéneo, bidimensional e isótropo vienen definidas por las ecuaciones 2.4 y 2.5 respectivamente.

$$\sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \hat{\sigma}_{ij}^I(\theta)$$

2.4

$$u_i^I = \frac{K_I}{2\nu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \hat{u}_i^I(\theta, \nu)$$

2.5

En estas ecuaciones σ_{ij} y u_i son las componentes del tensor de tensiones y desplazamientos según un sistema de coordenadas solidario al frente de la fisura como el que se muestra en la Figura 2.1 y del cual θ y r son la coordenada angular y radial respectivamente del punto a estudio. ν es el coeficiente de Poisson del material, $\hat{\sigma}_{ij}$ y \hat{u}_i son funciones que dependen de sus respectivos argumentos y K_I es el factor de intensidad de tensiones en modo I, el cual se discutirá más adelante. Este planteamiento puede utilizarse para los otros dos modos de fractura obteniendo expresiones equivalentes. Utilizando el principio de superposición de la elasticidad lineal se alcanza:

$$\sigma_{ij}^{TOTAL} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}$$

2.6

Irvin (3) en 1951 obtuvo las siguientes expresiones referidas al modo I de fractura en el caso de una placa infinita con una fisura pasante.

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$$

2.7

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$$

2.8

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

2.9

En el caso de tensión plana (T.P):

$$\sigma_{zz} = 0$$

2.10

En el caso de deformación plana (D.P):

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 2\nu \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

2.11

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

2.12

Desplazamientos:

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

2.13

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

2.14

Donde μ es el módulo de cortadura $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ y $\kappa = 3 - 4\nu$ en el caso de deformación plana y $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ si la situación es de tensión plana.

Si se representa la distribución de tensiones σ_{xx} y σ_{yy} en función de r para el frente de la fisura ($\theta = 0$) (ver Figura 2.3) se observa la singularidad de la solución en el frente de grieta.

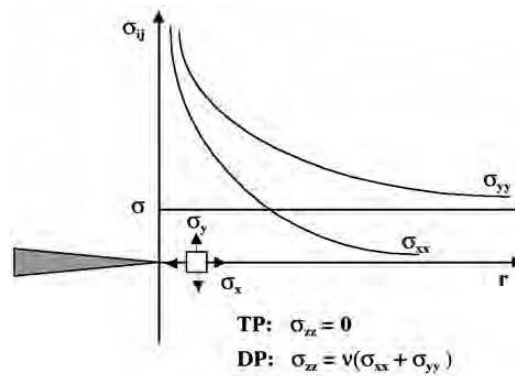


Figura 2.3: Distribución de tensiones en el frente de grieta mostrando la solución singular en el origen (4)

Por tanto, el análisis estático lineal de una fisura predice tensiones infinitas en su frente. No obstante en la práctica, todos los materiales presentan cierto grado de plasticidad -por pequeño que sea- en el frente de grieta. Esta deformación plástica amortigua el valor de la tensión en esta zona mejorando la resistencia a la rotura frágil. Según aumenta el tamaño de la zona plástica, el análisis estático lineal se hace menos exacto y aunque la MFEL se puede utilizar con plasticidades moderadas, no resulta efectivo aplicarla a casos en los que el tamaño de la zona plástica en el frente de grieta es considerable.

Una forma aproximada de establecer el tamaño de la zona plástica en torno al frente de grieta es el que aparece representado a continuación en la Figura 2.4.

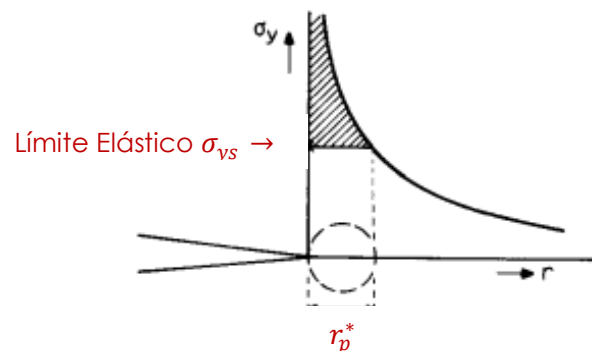


Figura 2.4: Primera aproximación del tamaño de la zona plástica en el frente de grieta

En ella se representa el valor de σ_{yy} en función de r para el frente de ra ($\theta = 0$). Estableciendo el valor del límite elástico del material σ_{ys} se puede determinar la extensión de la zona plástica determinada por r_p^* . El cálculo de esta distancia para el caso de tensiones y deformaciones planas se muestra en las ecuaciones 2.15 y 2.16 respectivamente:

$$r_p^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad 2.15$$

$$r_p^* = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad 2.16$$

Esta primera aproximación supone una zona plástica circular, basándose en la distancia calculada en la dirección longitudinal del frente de grieta. Irvin y Dugdale (6) presentaron en la década de los 60 modelos más completos para la determinación de la forma y extensión de la zona plástica como se desarrolla en (4).

En las ecuaciones 2.7 a 2.12 se observa que todas y cada una de las componentes de la tensión son proporcionales a K_I , parámetro conocido como Factor de Intensidad de Tensiones (FIT), que determina completamente las condiciones de tensión en el frente de grieta y que se representa mediante la siguiente expresión:

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad 2.17$$

donde a es la longitud de la fisura, σ es la tensión de referencia que depende de la sollicitación externa y F_I es un factor de corrección cuyo valor depende de la geometría de la fisura.

La propagación de la fisura tendrá lugar cuando el estado tensional permita alcanzar un valor crítico para el FIT. Este valor crítico, K_{IC} , depende del material y se conoce como tenacidad a fractura. Por tanto el estudio tensional concluye en que el criterio de fractura de este modo I queda:

$$K_I \geq K_{IC} \quad 2.18$$

Aunque estos cálculos se desarrollaron originariamente para una placa con una grieta elíptica pasante, posteriormente se demostró que eran generalizables para otras configuraciones geométricas.

2.1.1.2 Planteamiento global de la fractura

Según demostró Irvin (3), para los materiales elásticos lineales, el estudio energético y el del FIT se muestran equivalentes. El origen de esta teoría se basa en el principio de conservación de la energía asumido por Griffith (2) en sus estudios. Establece que la grieta preexistente en un sólido se propagará o provocará la fractura si la suma del trabajo generado por la tensión aplicada y la energía elástica liberada al propagarse la grieta (energía necesaria para la propagación de la misma) puede ser aportada por el sistema.

$$U_{\text{fuerzas exteriores}} = U_{\text{elástica}} + U_{\text{para propagación grieta}} \quad 2.19$$

$$G = \frac{dW_{\text{ext}}}{da} - \frac{dU}{da} \quad 2.20$$

En la ecuación 2.20, W_{ext} representa el trabajo exterior que realizan las cargas, U la energía de deformación del sólido y la función G -que depende de la tensión aplicada- se conoce como tasa de liberación de energía. Esta última se relaciona con el FIT como sigue:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad 2.21$$

donde $E' = E$ en condiciones de tensión plana y $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ en el caso de deformación plana.

De este modo el criterio de fractura siguiendo este enfoque energético puede resumirse en que la fisura se propagará en el momento en que la fuerza impulsora supere la resistencia del material R que se determina experimentalmente.

$$G \geq R \quad 2.22$$

2.1.2 Mecánica de Fractura Elasto-Plástica

Para poder aplicar la MFEL es condición necesaria que las deformaciones no lineales del material se limiten a una pequeña región alrededor del frente de la fisura. En condiciones de elevada temperatura (transición dúctil-frágil), con secciones delgadas o materiales más tenaces esta teoría no es aplicable por la elevada deformación plástica en el frente de grieta. Para estos casos es necesario considerar la teoría de la Mecánica de Fractura Elasto-Plástica. Los parámetros fundamentales de este nuevo planteamiento son la apertura del frente de grieta y la integral de contorno. Ambos describen no solo el comportamiento del frente de la grieta, sino que también pueden ser utilizados como criterio de fractura.

2.1.2.1 Desplazamiento de apertura del frente de grieta

Con la aplicación de las primeras cargas la fisura aguda preexistente en el material se vuelve roma, por lo que de forma previa al crecimiento de la fisura o a la fractura del material se produce un embotamiento (ver Figura 2.5) cuyas dimensiones son mayores según crece la tenacidad del material. En la punta de esta grieta roma se genera una nueva fisura aguda que crece de forma estable primero, e inestable después, hasta alcanzar la rotura según los casos.

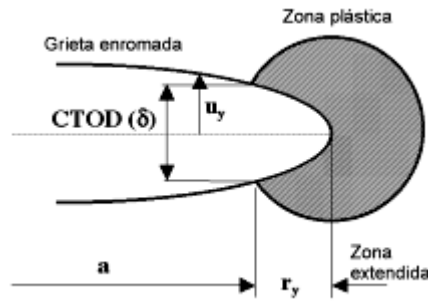


Figura 2.5: Embotamiento del frente de grieta en materiales dúctiles (4)

Para la generación de esta nueva fisura y su propagación, Wells (5) propone que el desplazamiento en el frente de grieta debe alcanzar un valor crítico. El valor del desplazamiento para una fisura de tamaño $a + r_y$ utilizando la ecuación 2.14 y considerando deformación plana puede escribirse:

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

2.23

La posición en coordenadas polares del punto a calcular es $r = r_y$; $\theta = \pi$. Sustituyendo:

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}} [\kappa + 1]$$

2.24

Como este desplazamiento coincide con la mitad del CTOD (siglas de *Crack Tip Opening Displacement* o *Apertura del Frente de Grieta* en castellano), se consigue una relación entre este parámetro y el FIT.

$$CTOD = \delta = 2u_y = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r_y}{2\pi}} [\kappa + 1]$$

2.25

La teoría de Wells (5) de caracterizar el frente de grieta mediante el CTOD se demostró apropiada poco tiempo después, cuando se consiguió relacionar dicho parámetro con la integral de contorno J .

2.1.2.2 Integral de contorno

La integral de contorno J se formula a comienzos del siglo XX para caracterizar el comportamiento de materiales elásticos no lineales. Consiste en una integral curvilínea cerrada alrededor del frente de fisura que representa la variación de energía que acompaña a la propagación de una grieta una distancia diferencial. Supone un buen equivalente del parámetro G en los materiales elasto-plásticos (ver ecuación 2.21).

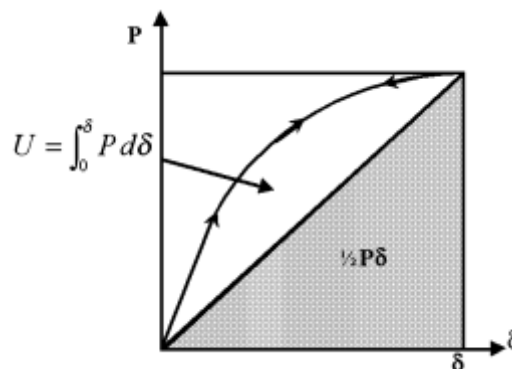


Figura 2.6: Comparación de la energía elástica almacenada por un material elástico lineal y otro no lineal

En la Figura 2.6 se muestra la diferencia entre la energía elástica almacenada por un material elástico lineal y otro no lineal. La almacenada por este último es mayor y por tanto, siguiendo el balance de energía de Griffith (2) (ver ecuación 2.19), la energía susceptible de ser empleada para la propagación de la grieta es menor.

2.2 Modelos de Zona Cohesiva

La implementación de la MFEL en el proceso de propagación de grietas, ofrece una solución singular en el origen (frente de la grieta). Esto es debido a que en el caso de una fisura aguda, esta actúa como un concentrador de tensiones de radio muy pequeño. No obstante esta formulación tensional no es exacta y fue por ello que se comenzaron a desarrollar modelos alternativos que superaran esta singularidad en el frente de grieta.

En 1960, Dugdale (6) fue pionero en el desarrollo de los llamados Modelos de Zona cohesiva (CZM, de las siglas en inglés *Cohesive Zone Model*). Propuso que en el extremo de la grieta existía una región de tensión constante y de valor igual al límite de fluencia del material. Posteriormente en 1962 Barenblatt (7) basó sus estudios en la

hipótesis de la presencia de una zona de material que a pesar de presentar daño, era capaz de transmitir esfuerzos. La extensión de esta zona es reducida y constante para un material dado. Por otro lado consideró que las tensiones en esta zona siguen una función dependiente de la coordenada que tiene origen en el extremo de la grieta como se muestra en la Figura 2.1.

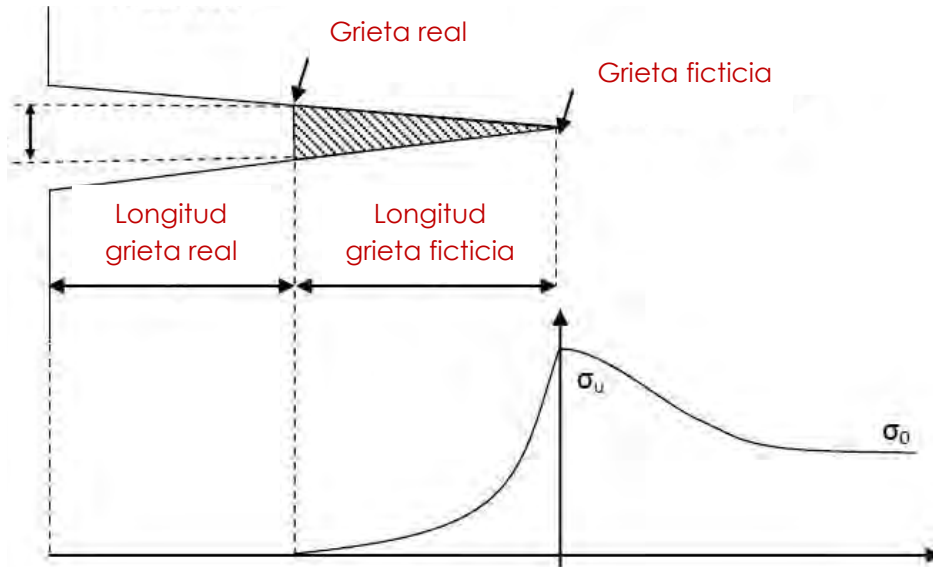


Figura 2.7: División de la grieta en real y ficticia y valores de tensión en el entorno del frente de grieta

Tanto Dugdale (6) como Barenblatt (7) coincidieron en dividir la grieta en dos zonas (ver Figura 2.7 y Figura 2.8). La primera sigue la idea de fisura introducida con la MFEL: dos superficies convergentes en el frente de grieta que solo son capaces de transmitir esfuerzos si ambas entran en contacto. La segunda se caracteriza por la presencia de microgrietas que se generan debido a los altos valores de tensión en la zona del frente de la grieta. Estas fisuras van degradando el material, reduciendo su rigidez y su capacidad de transmitir esfuerzos hasta que al alcanzar un valor límite de tensión, el material se fractura permitiendo el avance de la grieta. Este proceso de degradación será desarrollado en el apartado 2.2.1 utilizando la Ley de Tracción-Separación.



Figura 2.8: Escala atómica de las dos partes de la grieta

Por tanto los CZM permiten superar la singularidad de la solución que ofrece la MFEL. Este nuevo método permite no solo conocer el estado tensional del frente de grieta sino que permite describir completamente el proceso de fractura incluyendo la

formación de la fisura; algo que no puede realizarse aplicando los conceptos de la MFEL ya que esta última presupone la existencia de la misma. No obstante en la literatura se describen también inconvenientes que surgen de su implementación mediante elementos finitos, objeto del presente Trabajo. Mi et al. (8), Gao y Bower (9), Hu y Gonçalves et al. (10) describen la inestabilidad en los resultados numéricos. Además Gonçalves et al (11) detectaron el excesivo valor del máximo de carga en la gráfica tensión-deformación en su comparación con los valores experimentales.

A pesar de ello, la validez de su aplicación está ampliamente contrastada en estudios del inicio y desarrollo de grietas en una amplia variedad de medios, desde aceros hasta materiales compuestos pasando por cerámicas y polímeros entre otros.

2.2.1 Ley de Tracción-Separación

Como se indicó anteriormente el proceso de degradación del material en el frente de grieta es modelado analíticamente por la Ley de Tracción-Separación² (TSL del inglés *Traction-Separation Law*). En la Figura 2.9 se muestra un ejemplo de una gráfica tracción-separación. En ella se muestran las distintas etapas en la degradación del material. Inicialmente, y hasta alcanzar un nivel de tensión crítico, el comportamiento del material es lineal (comportamiento previo al daño). Alcanzada la tensión que marca el inicio del daño, se inicia un proceso de degradación que disminuye la rigidez del material hasta que esta se hace nula, el material se fractura y la fisura avanza (evolución del daño). Esta degradación no tiene porqué presentar un perfil lineal (ver Figura 2.10)

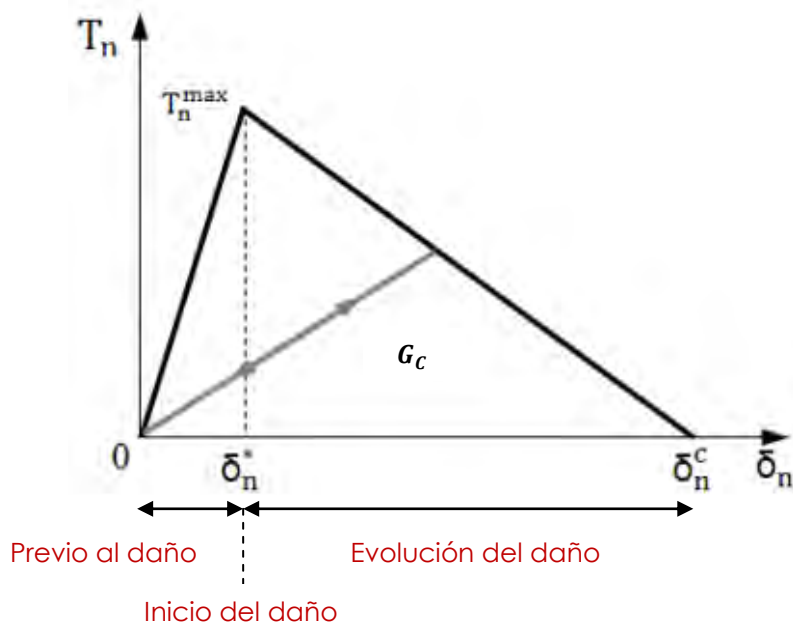


Figura 2.9: Gráfica Tracción-Separación indicando las etapas de la evolución del daño y otros parámetros característicos

² A pesar del empleo del término en singular, son numerosas las Leyes de Tracción-Separación. No obstante el tratamiento conceptual es muy similar en todas ellas con lo que el uso del singular es aceptable.

En el eje de ordenadas se representan las tensiones de tracción T_n y en el de abscisas el desplazamiento entre ambas caras de la fisura δ_n . T_n^{max} es la resistencia máxima a fractura o resistencia cohesiva y generalmente se encuentra referida al límite elástico del material. Gráficamente viene representada por el valor máximo de tensión en la gráfica tracción-separación. δ_n^* es el valor de la separación correspondiente a la resistencia cohesiva que marca el inicio del daño. δ_n^c , en cambio, denota el valor crítico de la separación ya que supone la degradación completa del material y por tanto su fractura. Por último G_c o energía cohesiva indica la energía disipada durante la separación del material y viene representada gráficamente por el área bajo la curva.

Otro aspecto importante en cuanto a la respuesta mecánica del modelo desde un punto de vista macroscópico, es la forma de la curva. En la Figura 2.10 se muestran algunos de los modelos más utilizados y donde \bar{T} y $\bar{\Delta}$ representan las tracciones y separaciones efectivas.

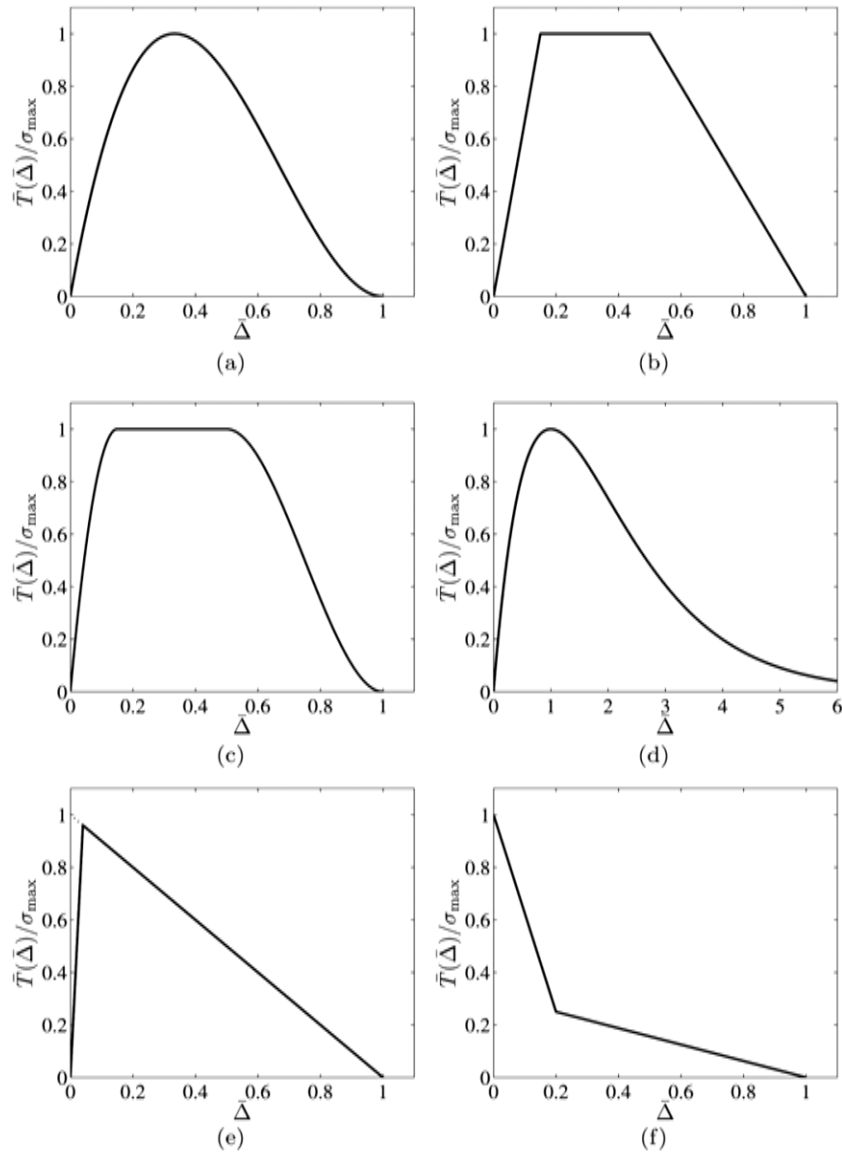


Figura 2.10: Modelos de gráfica Tracción-Separación (a) polinómico de grado 3, (b) trapezoidal, (c) trapezoidal suavizado (d) exponencial, (e) lineal y (f) bilineal **(12)**

Needleman y Xu (13) utilizaron el modelo exponencial (ver d) en Figura 2.10) para evitar las discontinuidades de modelos como el bilineal (ver e) en Figura 2.10) o el trapezoidal (ver b) en Figura 2.10). La función potencial ϕ utilizada por estos autores para su modelo se representa por:

$$\phi(\Delta_n, \Delta_t) = \phi_n + \phi_t \cdot e^{\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left\{ \left[1 - r + \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] \frac{1-q}{r-1} - \left[q + \left(\frac{r-q}{r-1} \right) \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] e^{\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right)} \right\}}$$

2.26

donde Δ_n y Δ_t son las componentes normal y tangencial del desplazamiento en la fisura, ϕ_n y ϕ_t son el trabajo de separación normal y tangencial respectivamente, $q = \frac{\phi_t}{\phi_n}$, $r = \frac{\Delta_n^*}{\delta_n}$ (donde Δ_n^* es el valor de Δ_n cuando se produce la separación tangencial en condiciones de tensión normal nula $T_n = 0$) y δ_n y δ_t son los parámetros del modelo.

Definiendo las tensiones normales T_n y tangenciales T_t en función de Δ_n y Δ_t y de la función potencial ϕ en la fisura y sustituyendo el valor de esta se tiene:

$$T_n = \frac{\partial \phi}{\partial \Delta_n} = \frac{\phi_n}{\delta_n} \cdot e^{\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) \left\{ \left(\frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) e^{\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right)} + \left(\frac{1-q}{r-1} \right) \left[1 - e^{\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right)} \right] \left(r - \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right) \right\}}$$

2.27

$$T_t = \frac{\partial \phi}{\partial \Delta_t} = \frac{2\phi_n \Delta_t}{\delta_t^2} \left[q + \left(\frac{r-q}{r-1} \right) \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right] e^{\left(-\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right) e^{\left(-\frac{\Delta_t^2}{\delta_t^2}\right)}}$$

2.28

En la Figura 2.11 se representan las ecuaciones 2.27 y 2.28 adimensionalizadas utilizando para ello el valor de la tensión máxima σ_{max} :

$$\sigma_{max} = T_n \delta_n \tau_{max} = T_t \frac{\delta_t}{\sqrt{2}}$$

2.29

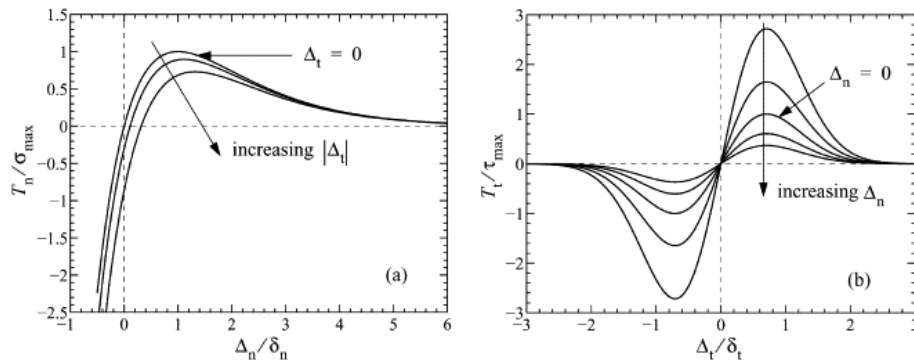


Figura 2.11: Representación gráfica de las ecuaciones 2.27 y 2.28 adimensionalizadas (14)

3

Fatiga

3.1 Introducción

El hecho de que una fuerza cíclica o repetitiva conduce a la rotura con mayor facilidad que una carga estática, fue constatado con anterioridad pero es a partir del siglo XIX con la aparición y desarrollo del ferrocarril cuando se impulsó el estudio de este comportamiento, ya que se comenzaba a considerar que las tensiones variables deterioraban el material. También se intuía de forma empírica el efecto concentrador de tensiones de entallas y muescas que limitaban la vida de los componentes.

Los estudios embrionarios de fatiga datan de la primera mitad del siglo XIX: Albert (15) en Alemania en 1837 y Rankine (16) en Gran Bretaña en 1842 quien analizó las posibles causas de los frecuentes fallos en los ejes de locomotoras y coches de ferrocarril. Destacó la importancia de reducir los concentradores de tensiones para aumentar la vida de los mismos y citó el fenómeno del *envejecimiento* del material (al parecer, el término fatiga fue empleado por vez primera en 1854 por el inglés Braithwaite (17)) como consecuencia de las tensiones variables. Más tarde, hacia 1860 en Alemania, Wöhler (18) realizó ensayos sistemáticos en laboratorio a partir de piezas de ferrocarriles, desarrollando para este fin diversas máquinas, muy similares algunas a las utilizadas actualmente para los ensayos de probeta rotatoria (ver apartado 3.2). Estos experimentos le llevaron a determinar que la fractura del material se producía a valores inferiores a los de la rotura estática. También comprobó que en piezas construidas con materiales férricos, por debajo de cierto nivel de tensión no se produce el fallo del componente sin importar el tiempo de aplicación de las cargas.

No obstante y a pesar de estos avances, el conocimiento de la microestructura de los materiales era muy deficiente y se aceptaba una explicación basada en la evolución de una estructura fibrosa a otra cristalina. Los estudios de Ewing y Humfrey (19) a principios del siglo XX supusieron un gran avance en este campo. Sin embargo no fueron capaces de explicar la existencia de una tensión límite de fatiga prevista por Wöhler (18). Fue en 1910 cuando Basquin (20) planteó una expresión en la que representaba el logaritmo de la tensión frente al logaritmo del número de ciclos a partir de los datos de Wöhler (18). Esta ecuación es la que se sigue empleando hoy en día. En la década de los años 20 Hanson y Gough establecieron la hipótesis de que para niveles bajos de tensión, se produce un endurecimiento del material que es capaz de frenar la propagación de microgrietas originadas por el deslizamiento cristalino. Orowan en 1939 intentó plantear cuantitativamente este comportamiento pero aun hoy en día no se ha conseguido una interpretación suficientemente fiable. (21)

Otros trabajos notables son los de Palmgren (22) en 1924 y Miner (23) en 1945 acerca del daño acumulativo o los de Coffin (24) y Manson (25) en 1954, basado en un análisis local de la fatiga, entre otros muchos. Los desarrollados por Gerber, Goodman y Soderberg serán detallados más adelante en el apartado 3.3.

3.2 Ensayos de fatiga

El ensayo de tracción uniaxial supone la referencia para la caracterización del comportamiento estático de los materiales. De forma similar, se ensayan probetas de materiales a fatiga para determinar su comportamiento dinámico de forma independiente a las condiciones de uso. Además se realizan ensayos de fatiga sobre prototipos en los que se intenta verificar el comportamiento del componente en condiciones de reales de trabajo.

En el caso del estudio de probetas a fatiga los ciclos de sollicitación quedan definidos por la tensión media σ_m y la tensión alternante σ_r :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

3.1

$$\sigma_r = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

3.2

donde σ_{max} y σ_{min} representan las tensiones máximas y mínimas respectivamente alcanzadas durante un ciclo de carga. Cabe destacar que en el estudio de fatiga no se tiene en cuenta la evolución de la tensión en el tiempo sino que solamente interesan los valores extremos alcanzados.

El ensayo de probeta rotatoria, o ensayo en la máquina de Moore (ver Figura 3.1), es uno de los más utilizados para caracterizar el comportamiento a fatiga de los metales. Consiste en poner a girar mediante un motor eléctrico pequeñas probetas de sección circular que se encuentran sometidas a un momento flector constante.

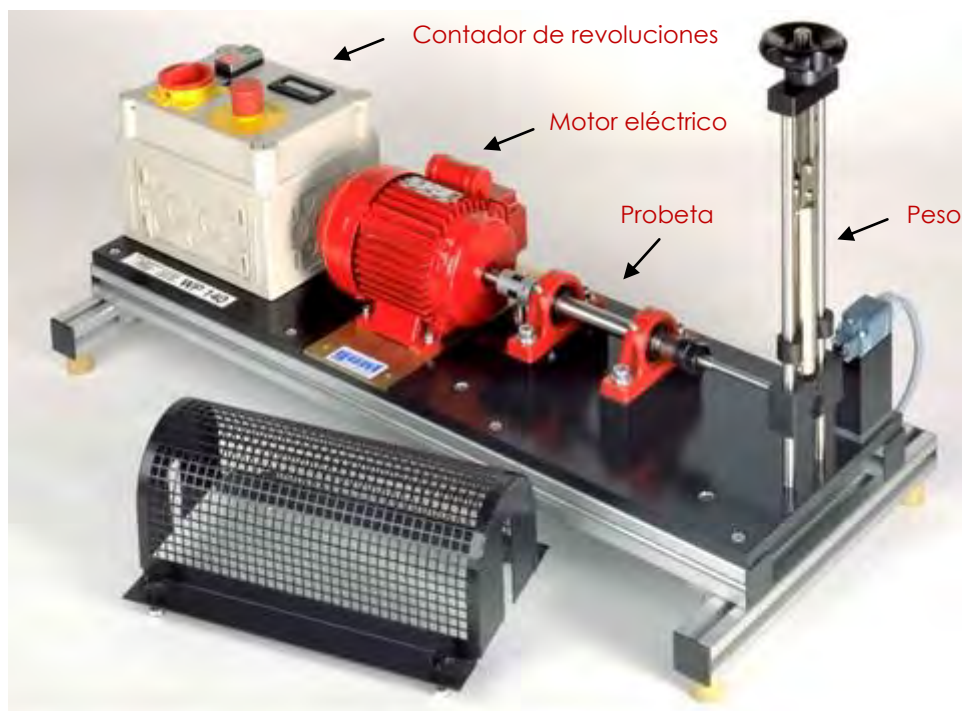


Figura 3.1: Máquina de Moore para ensayos de probeta rotatoria

De esta forma se consigue que los puntos de la periferia de la probeta se encuentren sometidos a una tensión cíclica alternante como se observa en la Figura 3.2. El ensayo se realiza para diferentes valores de tensión obteniendo para cada caso el número de ciclos a rotura o vida a fatiga.

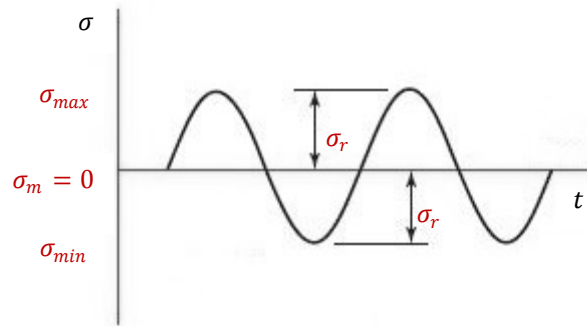


Figura 3.2: Tensión cíclica alternante (tensión media nula)

3.2.1 Diagramas de fatiga: curvas S-N

Si se representan estos puntos en un diagrama tensión-vida a fatiga se obtienen los diagramas S-N o de Wöhler. En el eje de abscisas se representa el número de ciclos a fatiga mientras que en el de ordenadas se representan los valores de tensión, ambos en escala logarítmica.

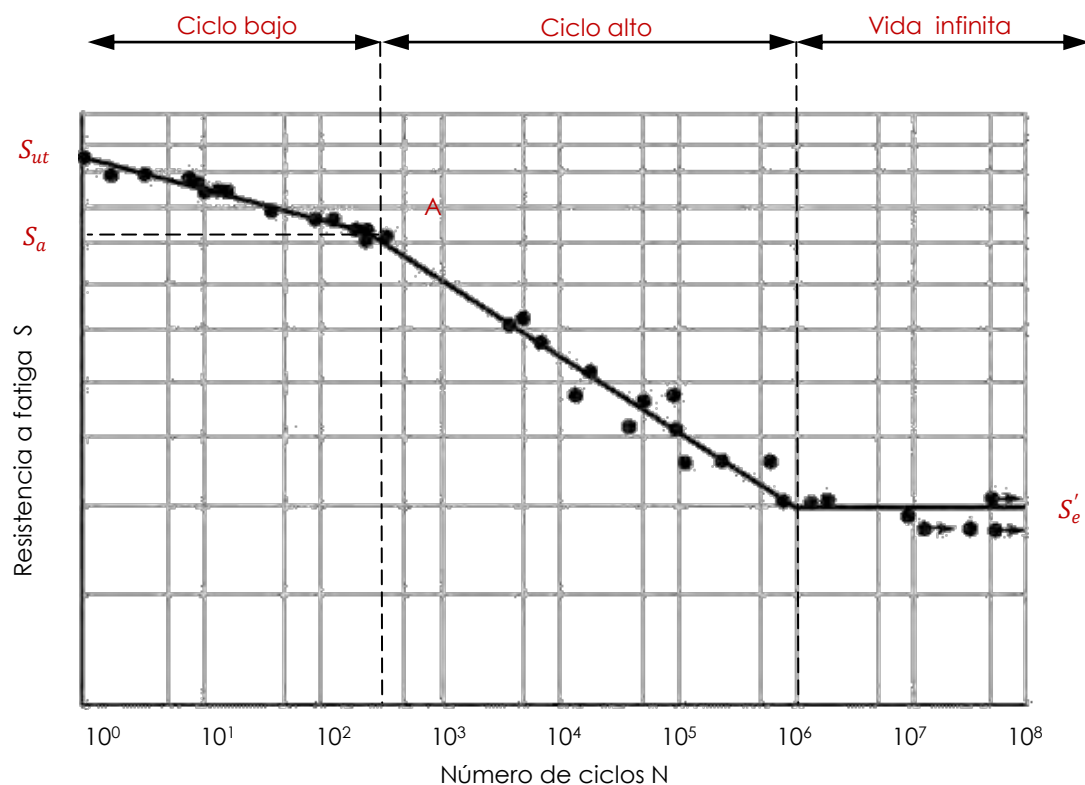


Figura 3.3: Representación de la curva S-N de un material que presenta límite de fatiga

En este tipo de diagramas se pueden diferenciar generalmente tres zonas: una primera de ciclo bajo de fatiga, otra de ciclo alto y por último una región de vida infinita.

El régimen de ciclo bajo de fatiga se extiende hasta alrededor de los 10^3 ciclos ($10^2 - 10^4$ dependiendo de los materiales). El material se comporta de forma similar a como lo haría frente a cargas estáticas pero se observa una ligera disminución de resistencia. En general se suele asumir que el codo A se presenta a un nivel de tensión en torno al 90% de la tensión última de rotura ($S_a = 0.9 S_{ut}$).

Por encima de los 10^3 ciclos y hasta los 10^6 ciclos aproximadamente ($10^6 - 10^7$ según el material) se encuentra el ciclo alto de fatiga. En este régimen se produce una notable reducción de la resistencia según se incrementa el número de ciclos.

En última instancia el material puede comportarse de dos formas diferentes. Por un lado están aquellos en los que existe un cierto nivel de tensión por debajo del cual no se producirá el fallo por fatiga. Este nivel de tensión se conoce como límite de fatiga del material y se denota por S'_e (ver Figura 3.3). Este comportamiento es propio de materiales férricos como la mayoría de los aceros. Por otro lado se encuentran materiales como el aluminio, sus aleaciones y algunos aceros de aleación en los que no existe este límite de fatiga con lo que cualquier esfuerzo por pequeño que sea provocará el fallo por fatiga alcanzado cierto número de ciclos. En la Figura 3.4 se comparan ambos comportamientos.

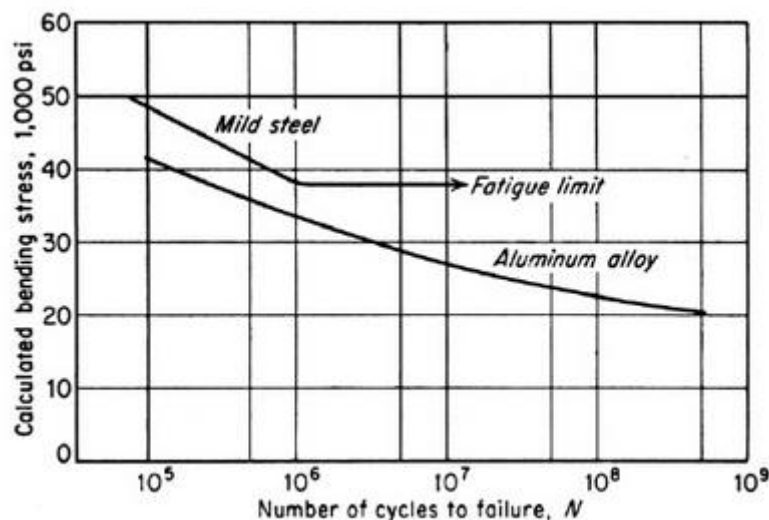


Figura 3.4: Comparación de materiales con y sin límite de fatiga.

La bibliografía ofrece valores aproximados para los límites de fatiga que se obtendrían en un ensayo de probeta rotatoria según distintos tipos de materiales. Por poner un ejemplo, en el caso del acero se ofrecen relaciones entre los valores de tensión última a fractura y el límite de fatiga siguiendo las siguientes aproximaciones:

$$S'_e \approx 0.5 S_{ut} \quad \text{si } S_{ut} < 1400 \text{ MPa}$$

$$S'_e \approx 700 \text{ MPa} \quad \text{si } S_{ut} \geq 1400 \text{ MPa}$$

3.4

No hay que olvidar que se trata de aproximaciones y de hecho existen diversas relaciones según la bibliografía consultada que por ejemplo ofrecen expresiones diferentes según el proceso de fabricación seguido por los aceros (colado, forjado etc).

3.2.2 Coeficientes modificativos del límite de fatiga

Todos los valores y gráficas que se han presentado anteriormente han sido obtenidos a partir de la realización del ensayo de probeta rotatoria. Este ensayo utiliza, como ya se ha comentado, unas condiciones muy concretas: las probetas tienen un tamaño reducido, han sido construidas y pulidas a conciencia y montadas en la máquina de ensayos con una gran precisión para evitar introducir efectos de carga indeseables tales como vibraciones. Además las condiciones ambientales también están controladas. Sin embargo las condiciones reales casi nunca se parecen a las descritas siendo estas desfavorables en lo que a fatiga se refiere.

En el caso del análisis estático, las teorías de tensiones equivalentes permiten extrapolar los resultados del ensayo normalizado de tracción uniaxial a cualquier otra situación de carga. Sin embargo en el caso del estudio dinámico todavía no se han desarrollado teorías que permitan esta extrapolación desde el ensayo de probeta rotatoria de forma fiable. Por ello se recurre a la utilización de coeficientes modificativos para ajustar los valores del comportamiento de la probeta a los de una determinada pieza.

Por tanto en unas condiciones diferentes a las de la probeta, el límite de fatiga queda modificado siguiendo la ecuación de Marin (26) que se presenta a continuación:

$$S_e = (K_a K_b K_c K_d K_e K_f) S'_e$$

3.5

donde S_e representa el límite de fatiga corregido y K_i cada uno de los diferentes factores modificativos del límite de fatiga del material S'_e . Notar que estos factores son por norma general menores a la unidad³, ya que las condiciones de las piezas reales son desfavorables en comparación con el ensayo realizado sobre la probeta.

1. Factor de acabado superficial K_a :

Se puede comprobar que acabados superficiales peores al que presenta la probeta (pulida a conciencia en dirección axial) reducen el límite de fatiga del componente, ya que una mayor rugosidad superficial fruto de un peor

³ Algunos autores (21) incluyen un coeficiente de tratamientos mecánicos en el que consideran el efecto beneficioso de introducir de esfuerzos superficiales de compresión (granallado) en el comportamiento a fatiga. Por tanto este coeficiente tendrá un valor mayor que la unidad. Otros (29), en cambio, lo incluyen en el factor de efectos diversos.

acabado provoca la aparición de concentradores de tensiones y por tanto de puntos con una mayor predisposición a la nucleación de fisuras. Este efecto es más acusado cuanto mayor sea la resistencia última del material. El valor de K_a queda determinado por:

$$K_a = a \cdot S_{ut}^b$$

3.6

donde a y b son valores tabulados según el tipo de acabado.

Tabla 3.1

Acabado superficial	a (MPa)	b
Pulido	1	0
Acabado fino (esmerilado, rectificado...)	1.58	-0.085
Mecanizado sin acabar o estirado en frío	4.51	-0.265
Laminado en caliente	57.7	-0.718
Forjado	272	-0.995

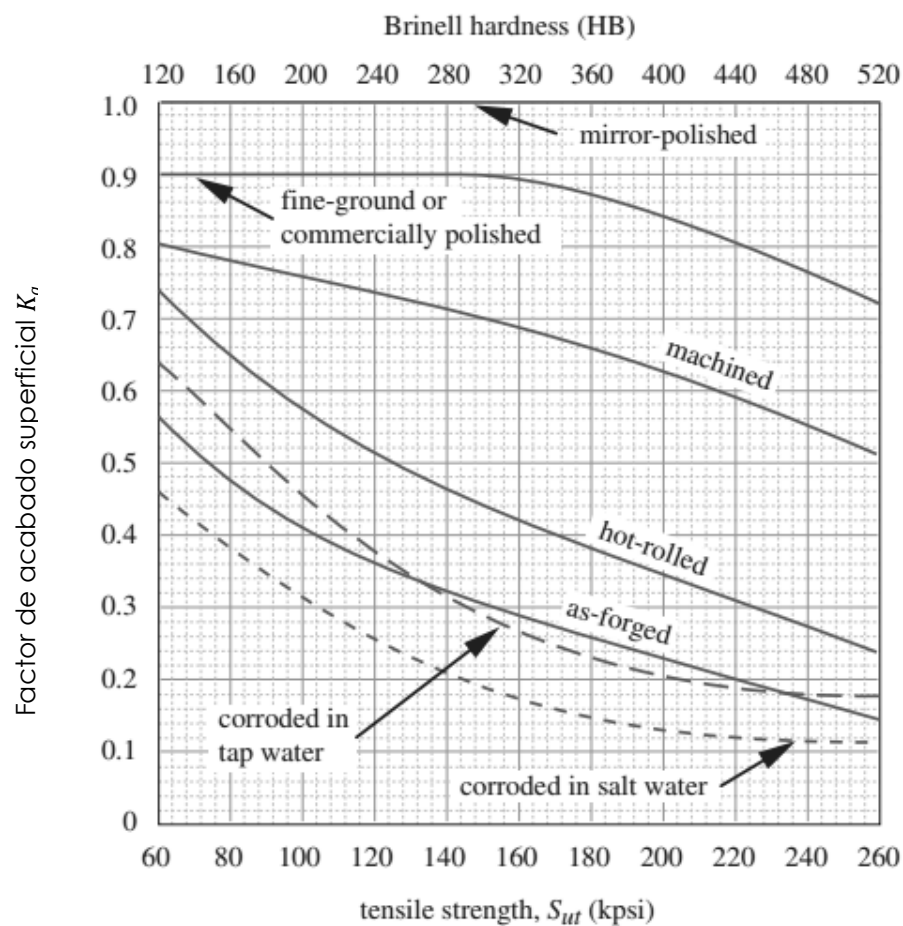


Figura 3.5: Factor de acabado superficial en función del acabado superficial y la resistencia última del acero o de su dureza (27)

2. Factor de tamaño K_b :

El tamaño de la probeta esta normalizado y puede no coincidir con el tamaño del componente a estudio. Es un hecho comprobado que la resistencia a fatiga tiende a disminuir a medida que aumenta el tamaño de las piezas ya que mayor volumen de material implica una mayor posibilidad de encontrar microgrietas y defectos en el material.

El valor de este factor fue evaluado por Mischke (28), quien ofreció las siguientes expresiones para flexión y torsión en un eje de sección circular rotatorio:

$$K_b = \left(\frac{d}{7.62} \right)^{-0.107} \quad 2.79 \leq d \leq 51 \text{ mm}$$

3.7

$$K_b = 1.51 d^{-0.157} \quad 51 < d \leq 254 \text{ mm}$$

3.8

donde d es el diámetro de la sección. Para poder aplicar estas expresiones al caso general de secciones no circulares se define el diámetro efectivo. Este se determina a partir del área del 95% de esfuerzo, $A_{95\sigma}$, que se define como la superficie limitada por los puntos de la sección que en algún momento están sometidos a una tensión mayor o igual al 95 % de la máxima. Por tanto, en una sección circular rotativa es:

$$A_{95\sigma} = \frac{\pi}{4} [d^2 - (0.95 d)^2] = 0.0766 d^2$$

3.9

Si se quiere calcular el diámetro efectivo de cualquier otra sección distinto al de una circular rotatoria será necesario calcular el $A_{95\sigma}$ de la sección deseada (en (29) se calculan estas áreas para diversas secciones). Igualando la sección de referencia con la deseada se obtiene el diámetro efectivo. Por ejemplo en el caso de una sección rectangular queda:

$$A_{95\sigma} = 0.95 h \cdot b \rightarrow 0.0766 d_e^2 = 0.95 h \cdot b \rightarrow d_e = 0.808 \sqrt{h \cdot b}$$

3.10

Por último, en el caso de carga axial, el tamaño no influye en la resistencia a fatiga con lo que $K_b = 1$.

3. Factor de fiabilidad K_c :

Este factor permite de forma analítica diseñar un componente a fatiga de manera que tenga una vida determinada para una fiabilidad establecida. Este hecho se debe al comportamiento estadístico de los ensayos que siguen

una distribución normal o de Weibull (30). Los valores de este factor en función de la confiabilidad deseada se ofrecen en la siguiente tabla:

Tabla 3.2

Fiabilidad	Factor de Fiabilidad K_c
0.5	1
0.9	0.897
0.95	0.868
0.99	0.814
0.999	0.753
0.9999	0.702
0.99999	0.659
0.999999	0.620
0.9999999	0.584
0.99999999	0.551
0.999999999	0.520

4. Factor de temperatura K_d :

Las propiedades de los materiales dependen de la temperatura. En el caso concreto de los aceros, a temperaturas bajas se reduce la ductilidad pero se incrementa la resistencia y es necesario tener en cuenta la posible transición dúctil-frágil. En cambio a temperaturas elevadas se produce el efecto contrario e incluso pueden darse fenómenos de fluencia combinados.

La obtención de este factor es complicada y resulta recomendable realizar pruebas de laboratorio para su determinación. Existen expresiones analíticas para su cálculo (ver ecuaciones 3.11 y 3.12) pero según la mayoría de los autores (21) no son fiables para aplicaciones industriales y solo resultan de interés en el ámbito académico.

$$K_d = 1 \quad T \leq 450^\circ\text{C}$$

3.11

$$K_d = 1 - 5.8 \times 10^{-3} (T - 450) \quad T \leq 450^\circ\text{C}$$

3.12

5. Factor de concentración de tensiones K_e :

Este factor cuantifica el efecto concentrador de tensiones de las diferentes discontinuidades que pueden estar presentes en un elemento tales como agujeros, chaveteros, radios de acuerdo etc. La expresión que permite su cálculo se escribe:

$$K_e = \frac{1}{1 + q(K_t - 1)}$$

3.13

donde q representa la sensibilidad del material a las ranuras y K_t depende del tipo de discontinuidad. Ambos parámetros se presentan en gráficas de las cuales se muestran a continuación algunas como ejemplo. (ver (29) para obtener la descripción completa)

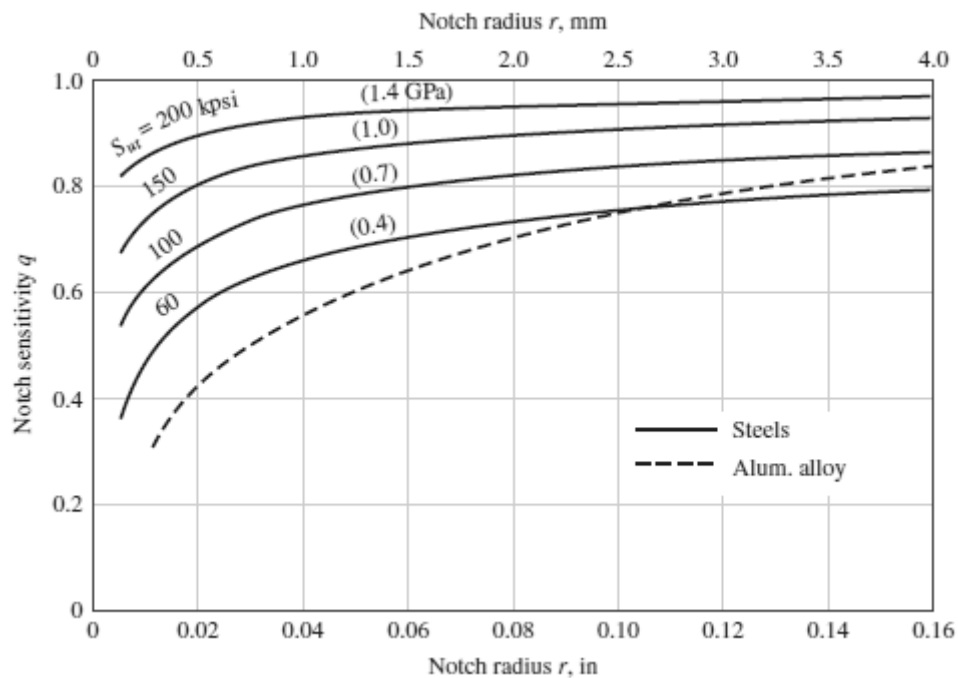


Figura 3.6: Factor de sensibilidad a las ranuras para cargas de flexión y axiales alternantes (29)

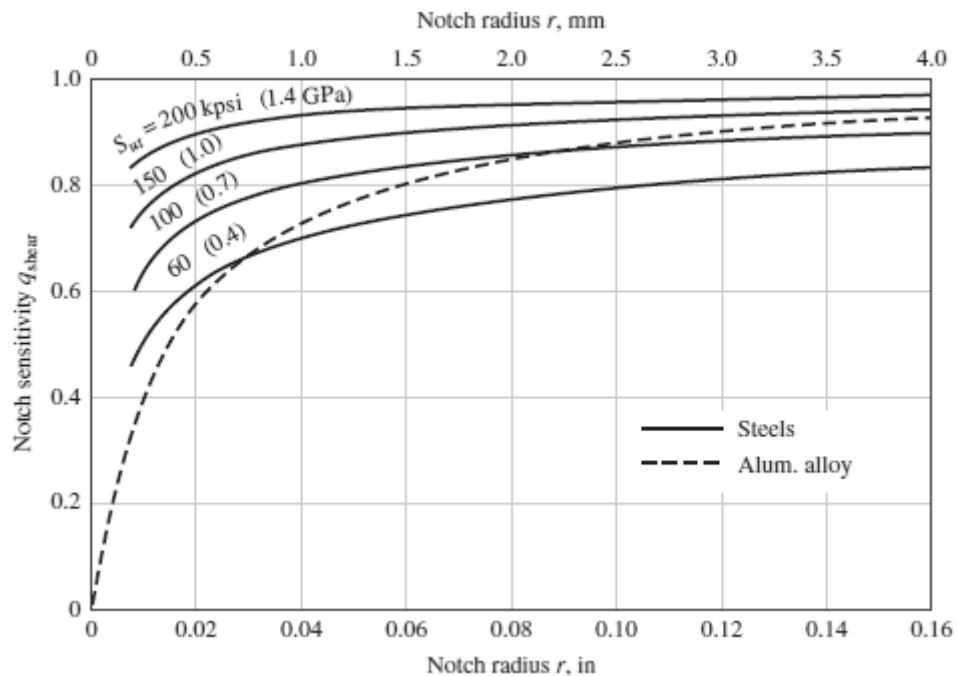
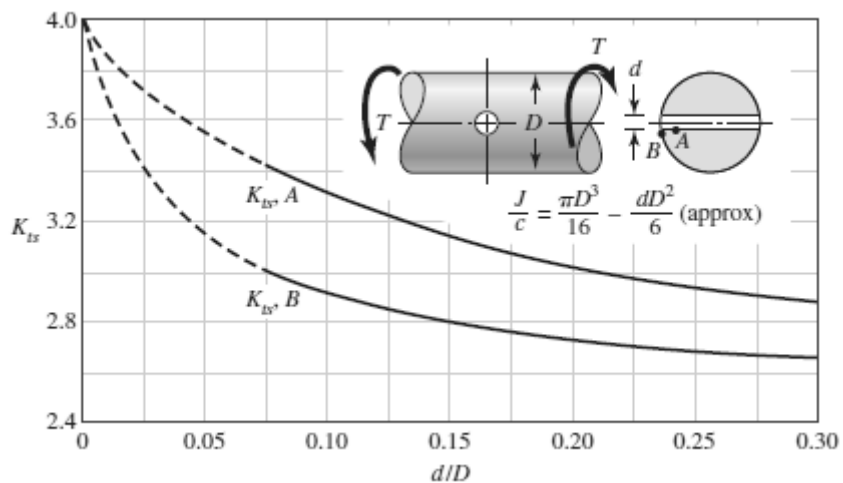
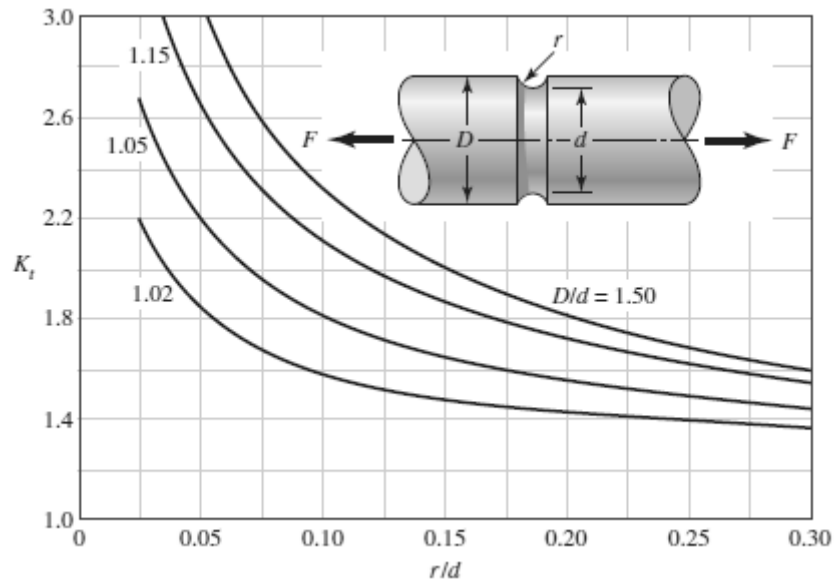


Figura 3.7: Factor de sensibilidad a las ranuras para cargas torsión alternantes (29)



6. Factor de efectos diversos K_f :

Con la introducción de este factor se permite tener en cuenta otras características que también pueden modificar el límite de fatiga. A continuación se analizan brevemente algunos de los más importantes.

- Efectos residuales o remanentes: operaciones como el chorreado en arena o el martillado modifican el límite de fatiga ya que introducen tensiones de compresión en la superficie mejorando la resistencia a fatiga.
- Efectos de la anisotropía: en materiales estirados, laminados o forjados, el límite de resistencia a fatiga en dirección transversal es alrededor de un 15 % inferior al de la dirección longitudinal.

- Efectos del temple superficial: se generan capas con diferentes resistencias a fatiga debido a la penetración del temple en el material.
- Efectos de corrosión: las zonas corroídas actúan como concentradores de tensiones disminuyendo el límite de fatiga del material.
- Efectos de los recubrimientos: recubrimientos electrolíticos como el cromado, el niquelado o el cadmiado pueden reducir el límite de fatiga hasta en un 50 %. En cambio el galvanizado no afecta a la resistencia a fatiga.
- Efectos del *fretting*: el movimiento microscópico entre superficies estrechamente ajustadas provoca picaduras y la reducción de la resistencia a fatiga en dicha zona.

Por último, en la Figura 3.10 se compara la curva S-N obtenida para una probeta y la que se obtiene tras la aplicación de la ecuación de Marin 3.5.

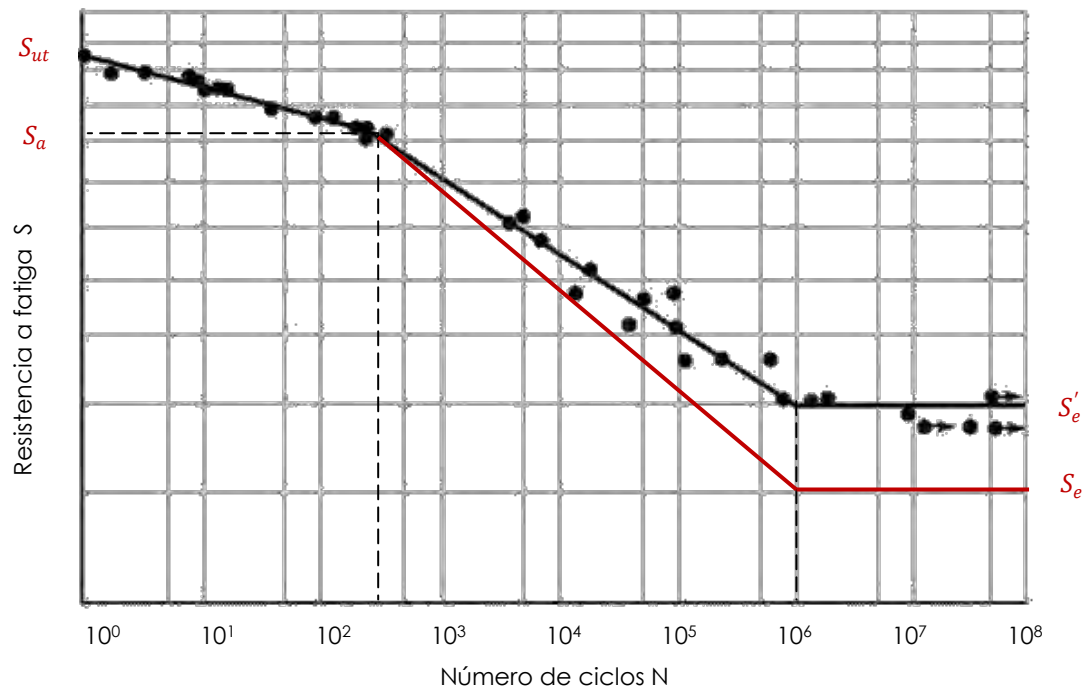


Figura 3.10: Comparación de la curva S-N antes (negra) y después (roja) de la aplicación de los factores de corrección de la ecuación de Marin.

3.3 Fatiga con tensiones medias no nulas

Las técnicas empleadas en los apartados anteriores no son directamente utilizables cuando la componente de tensión media no es nula (ver Figura 3.11). Por ello se realizan ensayos con diferentes combinaciones de carga y representando los resultados en los denominados diagramas de Haigh. En ellos se representa la tensión alterante σ_r que, para cada valor de la tensión media σ_m produce el fallo a un cierto número de ciclos N . El conjunto de puntos (σ_m, σ_r) obtenido separa las zonas de fallo -por encima de la nube de puntos- y de no fallo -por debajo de ella- (ver Figura 3.10).

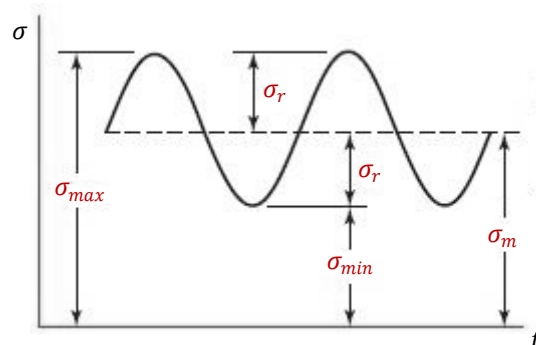


Figura 3.11: Tensión cíclica alternante con tensión media no nula

Para aproximar mediante expresiones analíticas los resultados de estos ensayos representados en los diagramas de Haigh, se han propuesto diversos criterios entre los que destacan el de Soderberg, Goodman y Gerber (31).

1. Criterio de Gerber:

Relaciona la tensión alternante σ_r y la media σ_m mediante una parábola. Representa con gran exactitud la distribución de puntos obtenida experimentalmente en los ensayos aunque incluye en su zona segura algunos puntos de fallo. No obstante estos son achacados a defectos en el ensayo como pequeñas excentricidades, vibraciones etc. La formulación de este criterio en el caso general del fallo a N ciclos, viene representada por:

$$\frac{\sigma_r}{S_f} + \left(\frac{\sigma_m}{S_{ut}}\right)^2 \leq 1$$

3.14

donde S_{ut} representa la tensión última a tracción y S_f la resistencia a fatiga para los N ciclos. En el caso particular de considerar 10^6 ciclos la resistencia a fatiga coincidiría con el límite de fatiga $S_f = S_e$. Cabe destacar los valores de ambos extremos de la curva. En el caso de tensión media nula $(0, S_f)$ el fallo se produce cuando la tensión alcanza el valor de la resistencia a fatiga a N ciclos que ofrece el diagrama S-N. Por otro lado, si la tensión alternante es nula $(S_{ut}, 0)$, estamos ante un problema estático estableciendo el fallo en la rotura del material cuando se alcanza la tensión última.

2. Criterio de Goodman:

Según este criterio la variación de la tensión alternante con la tensión media queda descrita mediante una recta que conecta los puntos $(0, S_f)$ y $(S_{ut}, 0)$ ya discutidos anteriormente. Por tanto la rotura a N ciclos se produce cuando:

$$\frac{\sigma_r}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} \leq 1$$

3.15

Cabe señalar en este punto que ambos criterios, tanto el de Gerber como el de Goodman, no consideran como fallo aquellos puntos en los que se supera el límite elástico S_{yt} , puesto que se trata de teorías que basan el criterio de fallo exclusivamente en la fatiga.

3. Criterio de Soderberg:

Este autor desarrolló una teoría que también previniese el fallo estático por fluencia. Como consecuencia de esta consideración se obtiene un criterio muy conservador que viene representado por:

$$\frac{\sigma_r}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_{yt}} \leq 1$$

3.16

donde se asume que el fallo en el caso de tensiones alternantes nulas se produce cuando se alcanza el límite elástico del material S_{yt} . Una forma de evitar este excesivo conservadurismo pero manteniendo los resultados del lado de la seguridad, consiste en modificar el criterio de Goodman para que ningún punto sea considerado seguro si se supera el límite elástico.

Todos estos criterios se representan en la Figura 3.12.

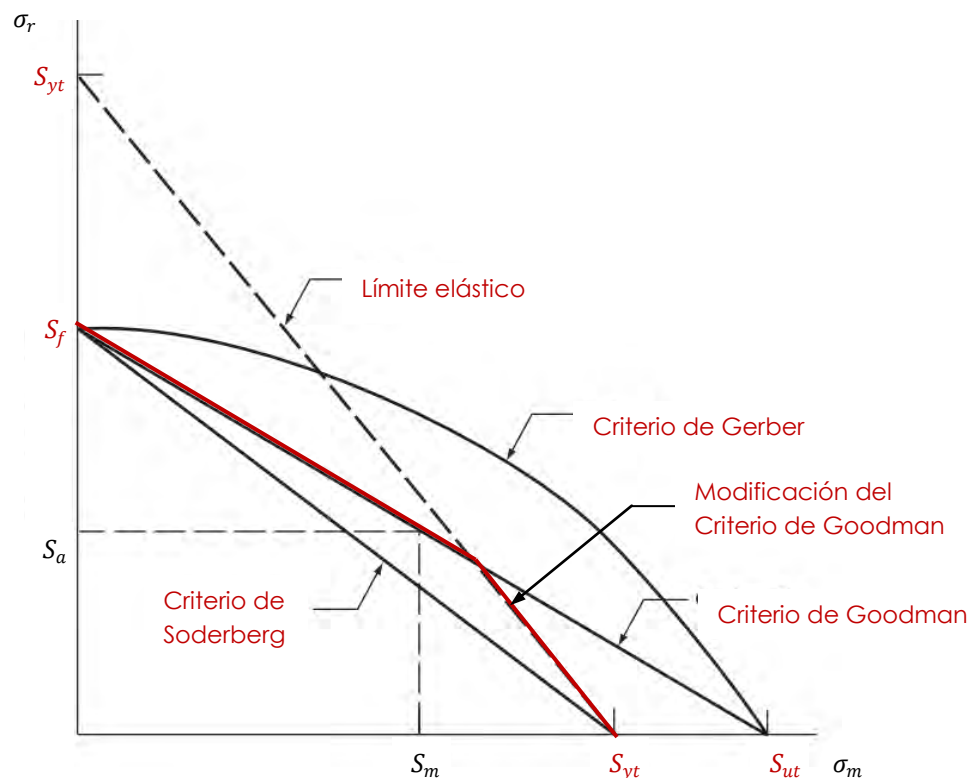


Figura 3.12: Criterios para el fallo por fatiga con tensiones medias no nulas para N ciclos

3.4 Modelos de propagación de fisuras de fatiga

Las fisuras se inician (nucleación) en un defecto del material o en una zona del componente en el que se produce una concentración de tensiones. Una vez nucleada, la fisura se podrá propagar según se sucedan los ciclos de fatiga pudiendo causar el fallo catastrófico del componente. A continuación se desarrollan las teorías más importantes en torno a la propagación de grietas de fatiga.

En 1961 Paris estableció que la caracterización del crecimiento de las grietas y fisuras queda determinado por la variación del FIT y este a su vez por las variaciones cíclicas de carga. Si K_{max} y K_{min} son los valores máximo y mínimo del FIT alcanzados durante un ciclo de carga, esta variación del FIT se expresa como sigue.

$$\Delta K = K_{max} - K_{min} \quad 3.17$$

Utilizando la ecuación 2.17, el problema puede plantearse como:

$$K_{max} = F \sigma_{max} \sqrt{\pi a} \quad 3.18$$

$$K_{min} = F \sigma_{min} \sqrt{\pi a} \quad 3.19$$

$$\Delta K = F \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \quad 3.20$$

$$\Delta \sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \quad 3.21$$

donde F depende de la geometría del elemento y de la fisura, σ_{max} y σ_{min} representan los límites de la tensión cíclica.

Paris y Erdogan (32), en el año 1963 propusieron la ley que lleva su nombre. Una ley empírica que superaba las desarrolladas hasta entonces y que hacía uso de los conceptos de la Mecánica de Fractura.

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m \quad 3.22$$

En esta ecuación $\frac{da}{dN}$ representa el incremento de longitud de la grieta por cada ciclo de carga. C y m son constantes que se determinan experimentalmente y que

dependen del material (microestructura, condiciones ambientales...) y de las condiciones de carga aunque esta última dependencia es secundaria. $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ representa el intervalo del FIT para un ciclo. En el caso de las tensiones de compresión, como estas no agravan el fenómeno de fatiga, en caso de alcanzarse K_{min} tomará el valor 0.

Para representar la Ley de Paris-Erdogan se toman logaritmos en la ecuación 3.22. Se observa que la expresión obtenida presenta forma de recta donde $\log(C)$ es la ordenada en el origen y m la pendiente de la misma.

$$\log\left(\frac{da}{dN}\right) = \log(C (\Delta K)^m) \rightarrow \log\left(\frac{da}{dN}\right) = \log(C) + m \log(\Delta K)$$

3.23

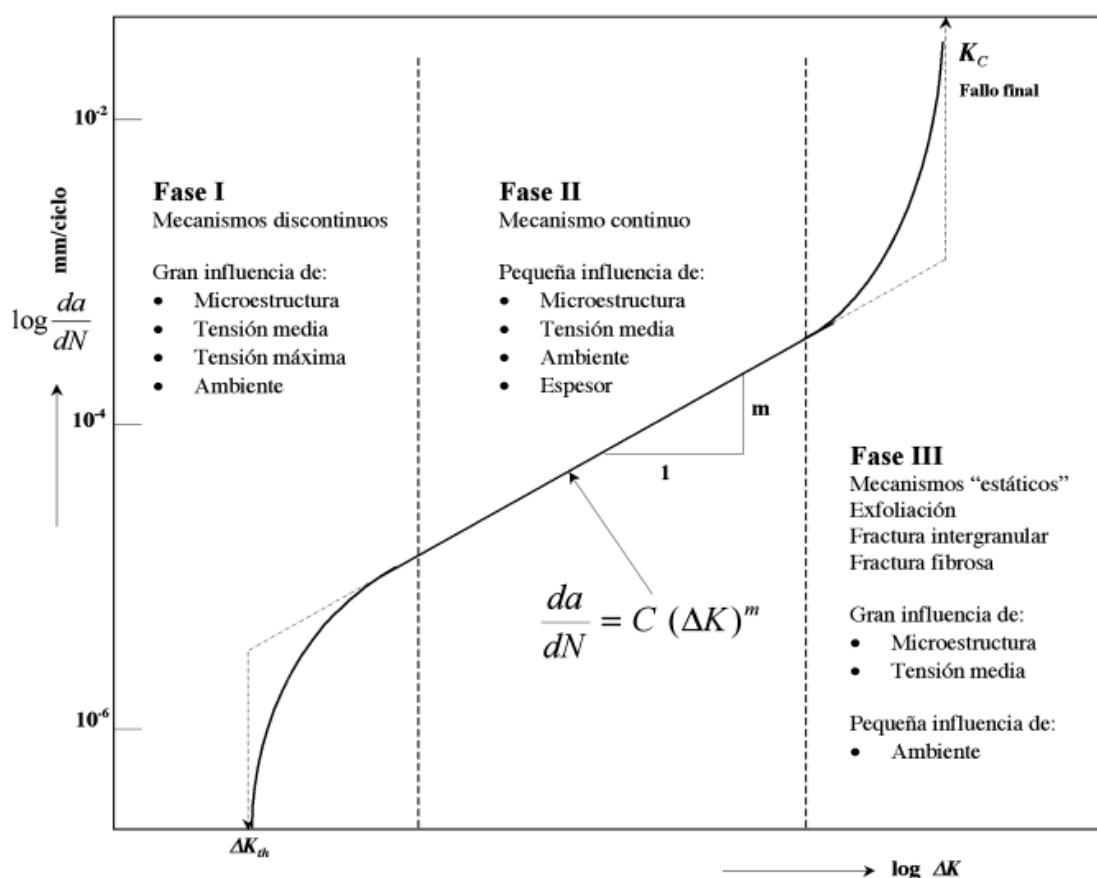


Figura 3.13: Representación gráfica de la evolución de la fisura en términos de la velocidad de crecimiento de la misma (4)

La Figura 3.13 representa la evolución de la velocidad de propagación de las fisuras desde su nucleación hasta la fractura, apreciándose tres zonas bien diferenciadas.

1. Fase I: durante la iniciación de la fisura la velocidad de crecimiento de la grieta disminuye a partir de cierto valor de ΔK . Esta zona se halla fuertemente influenciada por la microestructura, las condiciones ambientales y la relación entre

tensión mínima y máxima del ciclo de fatiga ($R = \sigma_{min} / \sigma_{max}$). Los estudios actuales se orientan a determinar la existencia de una amplitud umbral (ΔK_{th} en la Figura 3.13) por debajo de la cual las fisuras no se propagan ni crecen.

2. Fase II: cuando la velocidad de crecimiento de la grieta alcanza un valor estable se inicia la fase II o de propagación, en la cual es posible controlar el crecimiento de las fisuras utilizando la Ley de Paris-Erdogan. Las estrías microscópicas que se generan en esta fase representan el avance de la grieta en cada ciclo de carga. Miles de estas se acumulan y agrupan formando las denominadas *marcas de playa* que representan los periodos de reposo del componente y que se pueden apreciar a simple vista.

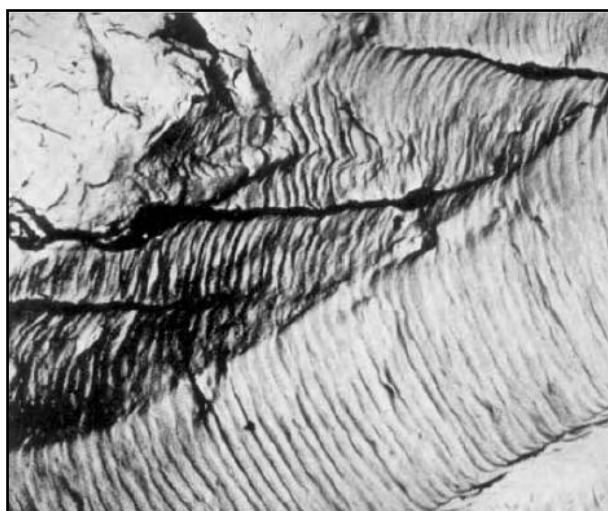


Ilustración 3.1: Representación microscópica de las estrías de fatiga (4)

3. Fase III: según los valores del FIT se aproximan al límite K_{IC} la velocidad de crecimiento de la fisura se incrementa hasta alcanzar el punto de rotura. El estado tensional tiene aquí un papel protagonista. También es importante la microestructura del material ya que una microestructura apropiada puede alargar considerablemente la vida de un componente a fatiga.

Aunque la Ley de Paris-Erdogan es ampliamente utilizada por su simplicidad, solo es capaz de predecir el desarrollo de la grieta cuando la velocidad de crecimiento es constante (fase II) pero no aporta información acerca de la iniciación de la grieta (fase I) o del rápido crecimiento final de la misma hasta la rotura (fase III). Existen modelos, empíricos o semiempíricos, más complejos que la Ley de Paris-Erdogan que incorporan la fase inicial y final del desarrollo de la fisura.

Un estudio más profundo determinó la influencia de la relación de tensiones R en el desarrollo de la fisura. Cuando este aumenta, bien por un aumento de la σ_{min} o una disminución de σ_{max} , se produce un aumento del crecimiento de la grieta para cierto valor de ΔK . La formulación de Walker (33) introduce esta dependencia proponiendo una modificación del factor de intensidad de tensiones K :

$$\overline{\Delta K} = K_{max} (1 - R)^\gamma$$

3.24

donde γ es una constante que depende del tipo de material y que determina la sensibilidad de este frente al efecto de R . Para valores de γ próximos a 1 el material no es sensible a dicho efecto (materiales tenaces como aceros de bajo carbono) mientras que para valores reducidos, el efecto de R en el desarrollo de la fisura es importante como en el hormigón u otros materiales frágiles. Con esta consideración Walker (33) modificó la expresión de la Ley de Paris-Erdogan hasta:

$$\frac{da}{dN} = C \left[\frac{\Delta K}{(1 - R)^{1-\gamma}} \right]^m \rightarrow \frac{da}{dN} = \frac{C}{[(1 - R)^{1-\gamma}]^m} \Delta K^m$$

3.25

donde se aprecia, en comparación con ésta, que la pendiente de la recta, descrita por m , no varía; mientras que la ordenada en el origen, C , incluye el efecto del parámetro R . No obstante, es necesario tener en cuenta que si las tensiones mínimas del ciclo son negativas, R también lo será, y puesto que los esfuerzos de compresión no afectan al crecimiento de la fisura, $\gamma = 0$ y por tanto $\overline{\Delta K} = K_{max}$.

Forman et al. (34) introdujo un modelo que permitiese representar la fase III. En esta fase el crecimiento de la grieta es muy rápido e inestable con lo que la vida de un elemento correspondiente a esta fase es mínima y suele ignorarse. Se centra en modelar el brusco incremento en la velocidad de propagación de la grieta cuando se aproxima el valor crítico del FIT K_c .

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \Delta K^m}{(1 - R) K_{cR} \Delta K}$$

3.26

Una nueva consideración fue introducida con la aparición del modelo de Elber (35), quien descubrió en 1970 que la fisura permanecía cerrada durante parte del ciclo de carga. Atendiendo a esta observación consideró que el crecimiento de la fisura solo se producía si esta se encontraba abierta. Para su implementación reformuló el modelo de Paris según la siguiente expresión:

$$\frac{da}{dN} = D \Delta K_{eff}^m$$

3.27

donde ΔK_{eff} se define como el FIT efectivo y se calcula como $\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{abierta}$. K_{max} representa el FIT máximo alcanzado en un ciclo de carga y $K_{abierta}$ en el caso de fisura abierta.

Ninguno de estos modelos es capaz de describir de forma completa el crecimiento de la grieta, desde que se inicia hasta la fractura del material. Collipriest (36) desarrolló una expresión que describía cada etapa del comportamiento de la fisura teniendo en cuenta tres consideraciones: la influencia de R , la inestabilidad en el cre-

cimiento de la grieta cuando el estado tensional genera valores del FIT cercanos al valor crítico K_{IC} y la presencia de un valor umbral ΔK_{th} por debajo del cual la fisura no progresa. El modelo resultante se escribe como sigue:

$$\frac{da}{dN} = C (K_{IC} \Delta K_{th})^{\frac{n}{2}} \cdot e^{\left\{ \ln \left(\frac{K_{IC}}{\Delta K_{th}} \right)^{\frac{n}{2}} \cdot \tan^{-1} \left[\frac{\ln \left(\frac{\Delta K^2}{(1-R) K_{IC} \Delta K_{th}} \right)}{\ln \left(\frac{(1-R) K_{IC}}{\Delta K_{th}}} \right)} \right] \right\}}$$

3.28

La complejidad, no obstante, para la implementación de estos modelos es tan elevada que la Ley de Paris sigue siendo la más utilizada en casos generales, reservando estos modelos más avanzados para casos muy concretos.

3.5 Aplicación a ejes rotativos fisurados

Una vez se han presentado consideraciones generales en cuanto al fenómeno de la fatiga así como distintos modelos para el estudio de la velocidad de propagación de fisuras de fatiga; se expondrán consideraciones importantes sobre los protagonistas de este trabajo: los ejes.

Los ejes son elementos mecánicos que se encuentran en la mayoría de máquinas y en sistemas de todo tipo. En aplicaciones críticas, se encuentran sometidos a solicitaciones y condiciones de carga muy exigentes. A pesar de la avanzada tecnología y de las enormes inversiones en investigación en cuanto a los materiales empleados, los procesos de fabricación, los ensayos no destructivos a los que son sometidos, las revisiones periódicas durante la vida en servicio etc no son escasos los fallos en estos elementos.

Los fallos más frecuentes en los ejes consisten en la propagación de grietas de fatiga debida a las tensiones combinadas de flexión y torsión a las que se encuentran sometidos durante su funcionamiento. La presencia de grietas altera el comportamiento dinámico habitual del mismo reduciendo su rigidez. Esta disminución depende principalmente de la geometría y del tamaño del defecto. Puesto que el riesgo de aparición de fisuras superficiales no puede ser eliminado por completo, se hace necesario el desarrollo de métodos eficientes que permitan predecir el crecimiento y desarrollo de estas grietas, aumentando la seguridad de estos elementos mediante una continua supervisión y su reemplazo cuando sea necesario.

3.5.1 Geometría y comportamiento de la fisura

Uno de los puntos críticos en el estudio de ejes consiste en predecir la forma de la fisura generada. Muchos estudios asumen un frente de grieta recto como el caso de Blackburn y Carpinteri (37) quienes estudiaron el FIT en un eje estático cargado para un frente de grieta recto mediante MEF. Posteriormente se realizaron estudios conside-

rando un frente de grieta semicircular hasta que se extendieron para frentes semielípticos. En la Figura 3.14 se presenta la evolución de distintas grietas en la sección transversal del eje. Se observa cómo, a pesar de los distintos frentes de fisura iniciales (línea continua), la fisura evoluciona con un frente semielíptico (línea discontinua) en todos los casos.

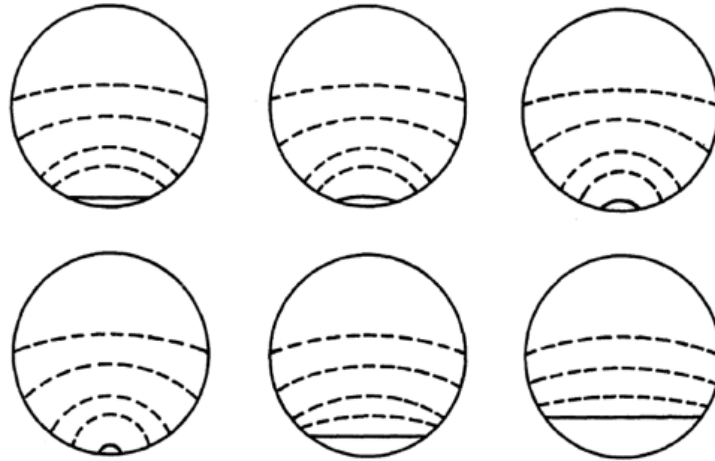


Figura 3.14: Evolución de fisuras de fatiga en ejes (37)

La caracterización geométrica de este último tipo de fisuras se presenta a continuación en la Figura 3.15 y en la Tabla 3.3:

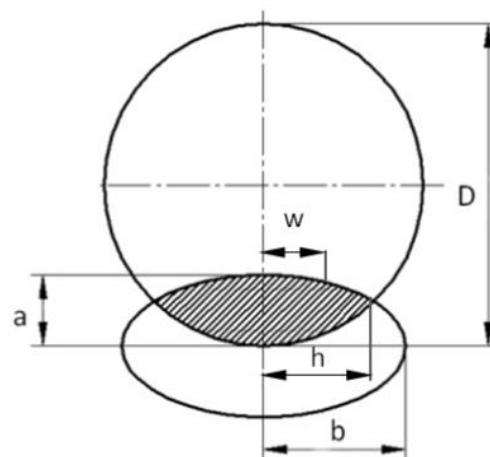


Figura 3.15: Representación de los parámetros que caracterizan la geometría de una fisura de frente semielíptico y de la sección del eje en la que se encuentra

Tabla 3.3

Parámetros fisura semielíptica		
Parámetro	Expresión	Comentarios
α	a/D	Profundidad de la fisura
β	a/b	Factor de forma de la fisura <ul style="list-style-type: none"> $\beta = 0$ Fisura de frente recto $\beta = 1$ Fisura de frente semicircular

r	w/h	Posición relativa de un punto en el frente de la fisura
-----	-------	---------------------------------------------------------

De hecho, ha sido este modelo de fisura el adoptado por la mayoría de los estudios realizados para la determinación del FIT en ejes rotativos. Destacan estudios llevados a cabo mediante métodos analíticos como el de Lorentzen et al. (38) usando la formulación desarrollada por Kobayashi (39), los de Levan y Royer (40) o Shin y Cai (41) mediante métodos numéricos, o los basados en métodos experimentales como la fractografía (Forman y Shivacumar (42) o Fonte (43)) y la fotoelasticidad (Lorentzen et al. (38)). En el caso del presente Trabajo se utilizará una fisura inicial de frente recto puesto que como se observa en la Figura 3.14 la evolución de la fisura es muy similar independientemente de la geometría inicial de la misma.

Por otro lado es necesario conocer el estado de la fisura según el eje gira. Según la localización de la fisura esta permanecerá parcial o completamente abierta o cerrada. Cuando se encuentra sometida a esfuerzos de tracción (fibras inferiores en un eje rotatorio horizontal) la fisura permanece abierta mientras que cuando actúan sobre ella esfuerzos de compresión (fibras superiores) permanecerá cerrada. El fenómeno de apertura y cierre, generalmente conocido como "*breathing*", afecta directamente a la rigidez del eje siendo esta máxima cuando la fisura está completamente cerrada y mínima cuando está completamente abierta.

A lo largo de un giro se producen distintos estados tensionales que en el caso particular del frente de grieta serán de tracción (fisura abierta) o compresión (cerrada). Tres son los modelos básicos que se utiliza en la literatura para caracterizar el comportamiento de la fisura según el giro del eje.

1. En primer lugar se encuentra el modelo de la fisura abierta según el cual la fisura siempre permanece abierta con lo que la función que determina la variación de la rigidez del eje según el ángulo es constante y de valor 1 ya que no hay variación en la apertura de la fisura.
2. Un segundo modelo consiste en considerar que la fisura se encuentra o completamente abierta o completamente cerrada ("*switching crack*") sin tener en cuenta los estados de apertura intermedios. Autores como Gasch (44) utilizan este modelo haciendo variar la función de rigidez entre 0 cuando la fisura se encuentra cerrada y 1 cuando está abierta siendo la transición entre ambos estados de tipo escalón aproximada mediante series de Fourier.
3. Por último se encuentra el modelo de "*breathing crack*" que considera una apertura y cierre gradual de la fisura. En este sentido Mayes y Davies (45) utilizaron una función trigonométrica (ver ecuación 3.29) para representar la evolución de la rigidez del eje según el eje girado.

$$G(\theta) = \frac{1 + \cos(\theta)}{2}$$

3.29

En la dirección de este último modelo, numerosos autores desarrollaron sus propias caracterizaciones para el fenómeno de apertura y cierre de la fisura. Darpe et al. (46) utiliza, para diferenciar la zona abierta de la cerrada, una línea perpendicular al frente de grieta recto y que pasa por el punto de intersección de este con el eje de simetría horizontal de la sección transversal del eje. La denomina como "línea de cierre de fisura". En la Figura 3.16 se muestra el comportamiento de este modelo para algunas posiciones angulares.

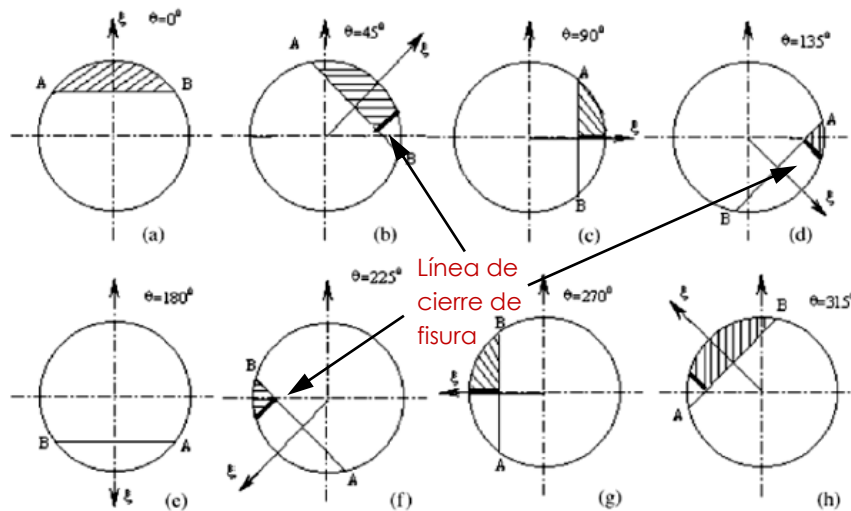


Figura 3.16: Comportamiento de apertura y cierre de la fisura según Darpe et al. (46)

Mediante el Método de los Elementos Finitos, Bachschmid et. al (47) estudiaron también este fenómeno utilizando una fisura de frente recto en un modelo tridimensional. Los resultados (ver Figura 3.17) predicen un comportamiento con notables diferencias con respecto al modelo considerado por Darpe et al. (46). Por ejemplo, para 45° la fisura se encuentra mucho más cerrada. Para 90° , Darpe et al (46) predice un estado intermedio, sin embargo, para este método en esta posición la fisura presenta un grado de apertura considerablemente mayor. De hecho cuando alcanza los 120° la fisura se encuentra abierta por completo.

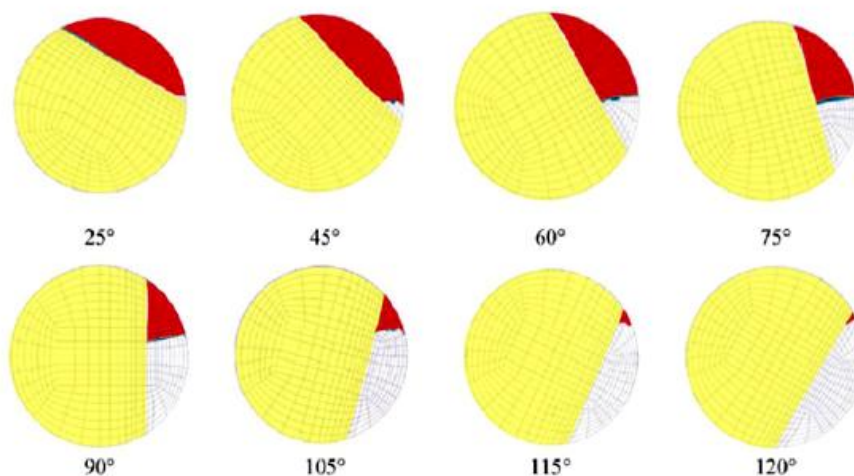


Figura 3.17: Resultados mediante MEF para el proceso de apertura y cierre de la fisura según Bachschmid et. al (47)

3.5.2 Modelos de propagación de fisuras en ejes

Puesto que los ejes son de uno de los elementos que con mayor frecuencia se encuentran sometidos a fatiga y su fallo en servicio puede tener consecuencias catastróficas, se han desarrollado técnicas específicas para el estudio de la propagación de grietas de fatiga en estos elementos. Estas técnicas de estudio pueden dividirse entre aquellas que se basan en la Ley de Paris-Erdogan y las que no.

Dicha Ley considera que el crecimiento de la fisura es perpendicular al frente de grieta. Este concepto es asumido por Carpinteri (37) en uno de sus trabajos donde estudió el comportamiento de un eje sometido a cargas axiales cíclicas. Para modelar la fisura utilizó una geometría elíptica para la misma de modo que para cada ciclo de carga se actualizan las dimensiones de la misma a través de los dos parámetros que la definen (semiejes mayor y menor) como se muestra a continuación:

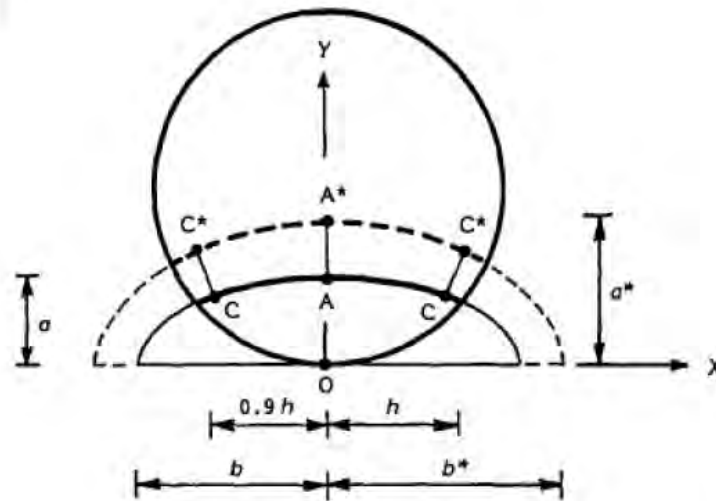


Figura 3.18: Desarrollo de la fisura semielíptica previsto por Carpinteri (37)

Así, si para cierto ciclo de carga la geometría de la fisura es $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, donde b y a son los semiejes mayor y menor respectivamente, en el siguiente será $\frac{x^2}{(b^*)^2} + \frac{y^2}{(a^*)^2} = 1$ donde b^* y a^* representan los nuevos valores de los semiejes tras el crecimiento de la fisura como se puede ver representado en la Figura 3.18.

Utilizando también la Ley de Paris-Erdogan como modelo para el desarrollo de la fisura, Carpinteri también estudió el comportamiento de esta geometría para el caso de un eje en flexión rotativa. Para ello consideró que durante el giro del eje se alcanza un punto en el cual el FIT es máximo y otro en el cual se hace mínimo. Por tanto la amplitud del FIT que se introduce en la Ley de Paris es:

$$\Delta K_{rot} = K_{rot}^{max} - K_{rot}^{min}$$

3.30

y como en un giro $K_{rot}^{max} = -K_{rot}^{min}$ esta amplitud se simplifica a:

$$\Delta K_{rot} = 2 K_{rot}^{max}$$

3.31

No obstante esta última consideración es discutida por algunos autores ya que supone la existencia de FIT negativos. En (48), por ejemplo, se considera que $K_{rot}^{min} = 0$ y por tanto:

$$\Delta K_{rot} = K_{rot}^{max}$$

3.32

Autores como Coroneau y Royer (49), Toribio et al. (50) y Lin y Smith (51) basaron sus desarrollos en la Ley de Paris-Erdogan aunque se le dieran enfoques diferentes al frente de fisura. Toribio et al. (50) utilizó el método de los mínimos cuadrados para aproximarlos, mientras que Lin y Smith (51) lo aproximaron mediante *splines*.

Por otro lado, existen estudios que utilizan modelos diferentes a la Ley de Paris-Erdogan para representar el crecimiento de la fisura. No obstante su uso está poco extendido debido a su elevada complejidad. Por ejemplo el modelo propuesto por Forman et al. fue modificado por Newman et al. (52) y utilizado por Shih y Chen (53) en sus estudios. Su formulación responde a la siguiente expresión:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C (1-f)^n \Delta K^n \left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K}\right)}{(1-R)^n \left(1 - \frac{\Delta K}{(1-R)K_C}\right)^q}$$

3.33

donde los parámetros C , n y q son constantes del material y f representa la apertura de la fisura.

4

Métodos y herramientas de cálculo numérico

4.1 Método de los Elementos Finitos

El Método de los Elementos Finitos, habitualmente conocido como MEF o FEM (de las siglas en inglés *Finite Element Method*) constituye una de las herramientas de cálculo numérico más importantes en la actualidad, y aunque es relativamente reciente, la idea de representar un dominio mediante elementos discretos es mucho más antigua. En el Antiguo Egipto el volumen de las pirámides era calculado mediante técnicas de discretización. Arquímedes (287-212 a.C) utilizó esta misma técnica para calcular volúmenes y superficies de todo tipo de geometrías. Además, los primeros matemáticos utilizaban este procedimiento para aproximar por ejemplo la longitud de la circunferencia. En este sentido, Lui Hui (300 d.C) utilizaba un polígono regular de más de 3000 lados para aproximarla consiguiendo con ello un valor de 3.1416 para el número pi.

En 1909 Rayleigh y Ritz desarrollaron un sistema para conseguir soluciones aproximadas de problemas aplicados a la mecánica de medios continuos. Posteriormente, en 1943 Courant (54) extendió de forma notable el método de Rayleigh-Ritz para poder resolver problemas de torsión. A pesar de las similitudes de estos sistemas con el MEF no fue hasta 1960 cuando Clough (55), partiendo de ideas diferentes, utilizó por primera vez el término de "elemento finito". A partir de este momento el MEF es objeto de un desarrollo espectacular favorecido por el paralelo desarrollo de la informática. El desarrollo de computadores cada vez más potentes permitía realizar las operaciones que demandaba el MEF de forma más rápida. Los científicos no tardaron en percatarse de la potencia del método, y la proliferación de bibliografía acerca de diferentes aplicaciones fue extraordinaria. En el análisis de estructuras aeronáuticas destacan autores como Turner, Martin, Topp y Clough (56). Oden (57) realizó importantes contribuciones matemáticas al método. Las publicaciones de Przemieniecki (58) o de Zienkiewicz y Hollister (59) presentan aplicaciones estructurales mientras que las de Zienkiewicz y Cheung (60) o Zienkiewicz y Taylor (61) presentan su aplicación a cualquier campo ingenieril.

En la actualidad los programas que implementan esta técnica se encuentran asociados o incluidos en interfaces de diseño por ordenador que permiten incluso la simulación de procesos de fabricación. Esto es lo que se conoce como CAD/CAE/CAM (Computer Aided Design/ Computer Aided Engineering/ Computer Aided Manufacturing) que conforma uno de los campos de mayor investigación y desarrollo en la actualidad y cuya aplicación en la industria se encuentra muy extendida.

4.1.1 Conceptos básicos del MEF

El concepto alrededor del cual gira el MEF es la división de un continuo en número finito de elementos cuyo comportamiento queda especificado al asignar una serie de parámetros a un cierto número de puntos significativos, denominados nodos, que se sitúan en los puntos de conexión de un elemento con sus adyacentes. Las va-

riables del problema (tensiones, deformaciones y desplazamientos en el caso de un problema estructural) son resueltas en estos puntos. La solución para el resto de puntos se obtiene mediante la interpolación de los resultados en los nodos utilizando para ello las denominadas funciones de forma o interpolación.

El MEF permite convertir, por tanto, un problema en ecuaciones diferenciales muy complejo de resolver analíticamente en un problema matricial que ofrece resultados para el conjunto finito de nodos del modelo para, interpolando después a partir de estos valores, obtener valores aproximados para el resto del dominio. El proceso necesario para resolver un problema mediante MEF se puede dividir en las siguientes etapas.

1. Preproceso: consiste en la generación de la geometría, asignación de propiedades de los materiales, especificación de las condiciones de contorno y cargas y la generación de la malla principalmente.
2. Cálculo: se genera un sistema de ecuaciones a partir de los datos introducidos en el preproceso que es resuelto usando distintos algoritmos de resolución. Si el problema no se limita a un instante del tiempo y depende de él, será necesario la resolución de sistemas de ecuaciones consecutivos. En este caso la resolución de un determinado sistema tiene en cuenta la solución obtenida para el sistema previo ya resuelto.
3. Postproceso: se procede a extender la solución nodal del cálculo a los elementos mediante las funciones de interpolación. Por último, las interfaces gráficas permiten la visualización de estos resultados así como su manipulación.

4.1.2 Aplicación a problemas estructurales de elasticidad tridimensional

En las aplicaciones estructurales del MEF los grados de libertad o variables que se tienen en cuenta en los cálculos son básicamente desplazamientos, deformaciones y tensiones (62).

4.1.2.1 Desplazamientos

Un punto cualquiera del sólido tiene tres desplazamientos u, v, w que dependen de forma genérica de sus coordenadas x, y, z y que se agrupan en el vector \mathbf{u} de desplazamientos.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

4.1

Cada nodo de un elemento presenta unos desplazamientos U_i, V_i, W_i que se pueden agrupar formando el vector de desplazamientos nodales de un elemento δ^e .

$$\delta^e = \{U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad W_2 \quad \dots\}^T$$

4.2

Los desplazamientos se interpolan en función de los desplazamientos nodales gracias a las funciones de forma o de interpolación.

$$u = \sum N_i U_i$$

4.3

$$v = \sum N_i V_i$$

4.4

$$w = \sum N_i W_i$$

4.5

Que expresadas en forma matricial:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \delta^e$$

4.6

donde \mathbf{N} es la matriz de funciones de forma o de interpolación y cuya estructura se presenta a continuación para un elemento con m nodos.

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_m & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix}$$

4.7

4.1.2.2 Deformaciones

En un punto cualquiera del sólido existe un vector de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ compuesto por tres componentes unitarias ε y tres de cortadura γ . Suponiendo pequeñas deformaciones se puede escribir:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \partial \mathbf{u}$$

4.8

donde ∂ representa el operador matricial. Sustituyendo el vector de desplazamientos \mathbf{u} por su expresión matricial en función de los desplazamientos nodales $\boldsymbol{\delta}^e$ (ecuación 4.6), el vector de deformaciones queda:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \partial \mathbf{N} \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e$$

4.9

donde la matriz \mathbf{B} relaciona las deformaciones de los nodos con las deformaciones unitarias en un punto cualquiera del elemento, y que puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{N} = \partial \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & N_m & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_m]$$

4.10

donde cada una de las \mathbf{B}_i queda definida por:

$$\mathbf{B}_i = \partial N_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

4.11

4.1.2.3 Tensiones

El tensor de tensiones en tres dimensiones describe la tensión en un punto cualquiera del sólido.

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

4.12

Para un material elástico lineal la ecuación constitutiva se escribe como:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0$$

4.13

siendo:

1. D la matriz elástica, que para el caso de un material elástico lineal depende únicamente del Módulo de Elasticidad E y del coeficiente de Poisson ν del material.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

4.14

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

4.15

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

4.16

2. ε_0 las deformaciones unitarias iniciales en el material que serán conocidas.
3. σ_0 las tensiones iniciales en el material, también conocidas.

4.1.2.4 Ecuación de equilibrio

Por el Principio de los Trabajos Virtuales o PTV, el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas en un elemento debe coincidir con la variación de la energía elástica del mismo.

$$\delta W^e = \delta U^e$$

4.17

Sobre un elemento finito cualquiera pueden actuar fuerzas exteriores de volumen q_v , fuerzas exteriores de superficie q_s , fuerzas exteriores puntuales aplicadas en los nodos P_N^e y fuerzas interiores q_c . El cálculo de los trabajos virtual de estas fuerzas en un elemento se escribe:

$$\delta W^e = \int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s ds + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_c ds + \delta \boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{P}_N^e$$

4.18

La energía elástica almacenada en el elemento se puede expresar como:

$$\delta U^e = \int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv$$

4.19

Aplicando ahora el PTV según la ecuación 4.17 se obtiene:

$$\int_v \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s ds + \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_c ds + \delta \boldsymbol{\delta}^{eT} \mathbf{P}_N^e = \int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dv$$

4.20

Si se sustituye la ecuación constitutiva del material en función de la matriz B y se ordenan los términos se alcanza la ecuación de equilibrio para el elemento:

$$\int_v B^T D B \boldsymbol{\delta}^e dv = \int_v N^T \mathbf{q}_v dv + \int_s N^T \mathbf{q}_s ds + \int_v B^T D \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv - \int_v B^T \boldsymbol{\sigma}_0 dv + \mathbf{P}_C^e + \mathbf{P}_N^e$$

4.21

donde se pueden identificar los siguientes términos:

1. Matriz de rigidez del elemento finito

$$K^e = \int_v B^T D B dv$$

4.22

2. Vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las fuerzas externas de volumen

$$\mathbf{P}_v^e = \int_v N^T \mathbf{q}_v dv$$

4.23

3. Vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las fuerzas externas de superficie

$$\mathbf{P}_s^e = \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s ds$$

4.24

4. Vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las deformaciones iniciales

$$\mathbf{P}_T^e = \int_v \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dv$$

4.25

5. Vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las tensiones iniciales

$$\mathbf{P}_b^e = \int_v \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dv$$

4.26

Con ello la ecuación de equilibrio del elemento finito puede escribirse de forma más compacta.

$$\mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{P}_v^e + \mathbf{P}_s^e + \mathbf{P}_T^e + \mathbf{P}_b^e + \mathbf{P}_C^e + \mathbf{P}_N^e$$

4.27

Este procedimiento se puede extender desde un único elemento hasta la estructura completa, ensamblando las matrices de los distintos elementos hasta alcanzar la ecuación de equilibrio de toda la estructura.

4.2 Método de los Elementos Finitos Extendido

A pesar del notable desarrollo del MEF, su aplicación a la modelización de discontinuidades en movimiento (propagación de fisuras, objeto de este Trabajo) presenta ciertos inconvenientes. En la Figura 4.1 se muestra la malla de elementos finitos en cierto instante del desarrollo de una fisura aguda. Se puede observar como el mallado se adapta a la topología de la grieta. Por tanto según avanza esta, se hace necesario remallar todo el dominio con los costes computacionales y de tiempo que conlleva por no hablar de los errores inducidos que se generan.

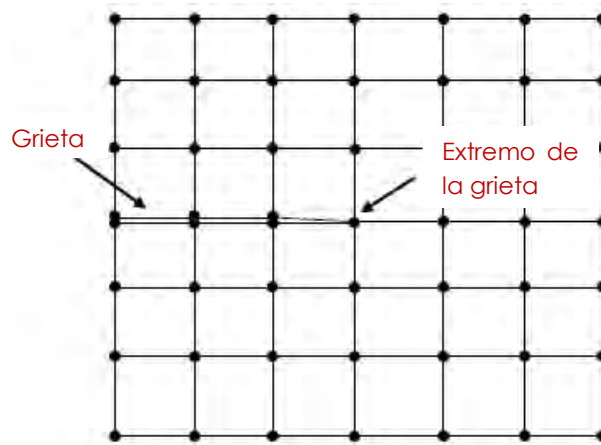


Figura 4.1: Adaptación de la malla a la topología de la fisura

Estos inconvenientes llevaron al desarrollo de nuevos métodos entre los que destaca el *XFEM* (de las siglas en inglés de *eXtended Finite Element Method*). Propuesto por Belytschko y Black (63) y Moës et al. (64) en 1999, utiliza una sola malla que además presenta las ventajas de no necesitar un gran nivel de refinamiento ni ser estructurada (ver Figura 4.2). La grieta es considerada como una entidad separada e independiente (ver Figura 4.3) que interactúa con el mallado mediante el *enriquecimiento* de los nodos pertenecientes a los elementos atravesados por la fisura.

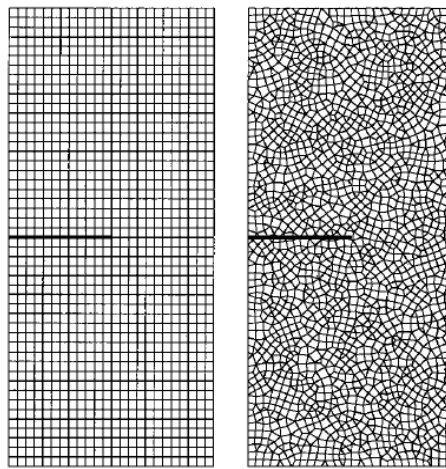


Figura 4.2: Fisura en una malla estructurada (izquierda) y no estructurada (derecha) (63)

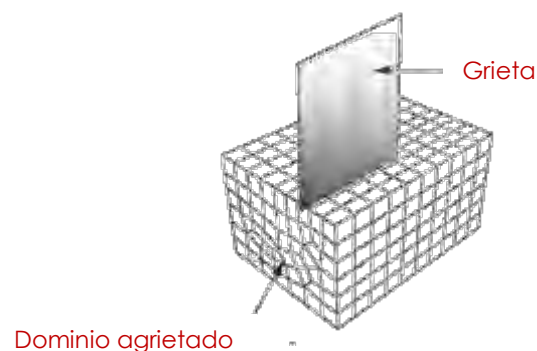


Figura 4.3: Representación independiente de la grieta y elemento fisurado en XFEM (65)

4.2.1 Funciones de enriquecimiento

El modelo propuesto por Belytschko y Black (63) aumenta los grados de libertad de los nodos pertenecientes a los elementos en los que se encuentra el extremo de la grieta (ver Figura 4.4).

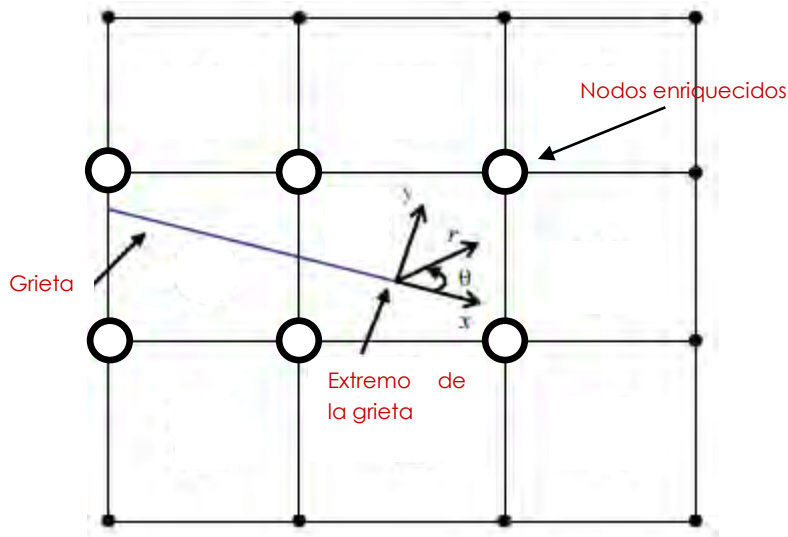


Figura 4.4: Enriquecimiento en los nodos del elemento en que se encuentra el frente de grieta

La formulación de este nuevo modelo de elementos finitos se puede expresar:

$$\mathbf{u}(x) = \sum_i^m N_i(x) \mathbf{u}_i + \sum_i^n \left[N_i(x) \sum_{l=1}^4 F_l(x) b_{il} \right]$$

4.28

donde m es el total de nodos de la malla (puntos pequeños en la Figura 4.4), n es el número de nodos enriquecidos (puntos grandes en la Figura 4.4), x es el eje orientado según las caras de la grieta, $N(x)$ son las funciones de interpolación habituales, b_{il} son los grados de libertad añadidos y $F_l(x)$ representa las funciones de enriquecimiento de tipo extremo de grieta que tienen su procedencia en el campo de desplazamientos de la MFEL.

4.2.2 Funciones de enriquecimiento de Heaviside

Las funciones de enriquecimiento de tipo extremo de grieta utilizadas por Belytschko y Black (63) no resultan efectivas para los elementos lejanos al extremo de la fisura cuando esta crece o no sigue una trayectoria rectilínea. Moës et al. (64) desarrolló un planteamiento similar al de Belytschko y Black (63) en el extremo de la grieta pero enriquecían con la función de Heaviside estos nodos lejanos que en la Figura 4.5 se representan por puntos rojos.

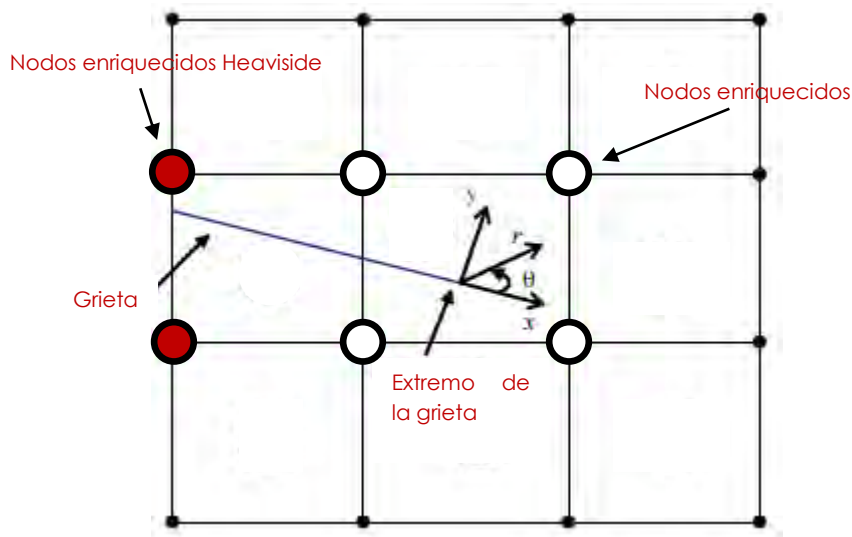


Figura 4.5: Enriquecimiento de Heaviside en los nodos de los elementos alejados del frente de grieta

Con esta nueva aportación la formulación de los desplazamientos se escribe:

$$\mathbf{u}(x) = \sum_i^m N_i(x) \mathbf{u}_i + \sum_i^p N_i(x) H(x) \mathbf{a}_i + \sum_i^n \left[N_i(x) \sum_{l=1}^4 F_l(x) b_{il} \right]$$

4.29

donde p son los nodos lejanos al extremo de grieta enriquecidos con la función de Heaviside $H(x)$. De esta forma, en el caso plano en el que los nodos estándar presentan dos grados de libertad (g.d.l), los enriquecidos con la función de Heaviside presentan dos adicionales hasta 4 g.d.l, mientras que los que limitan el elemento donde se encuentra presente el extremo de la grieta presentan un total de 10 g.d.l (8 adicionales).

Este desarrollo en el plano fue extendido al caso tridimensional por Sukumar et al. (66). El desarrollo del XFEM no ha parado desde entonces. En el año 2003 Zi y Belytschko (67) junto con Ventura et al. (68) desarrollaron una variante al modelo denominada "shifted" que sería utilizada más tarde por Giner et al. (69) en sus trabajos.

4.3 Modelización de fisuras con XFEM en Abaqus

Las ventajas del XFEM frente al FEM en el estudio de la propagación de fisuras son evidentes. El no tener que remallar el modelo según se propaga la grieta, la posibilidad del desarrollo de la misma por el interior de elementos, el modelado de la geometría de la fisura de forma independiente al dominio por el que se propagará etc facilita enormemente la tarea a desarrollar en el presente Trabajo. Existen numerosos

softwares de elementos finitos que implementan el XFEM, entre los que destacan ANSYS y Abaqus. Debido a la mayor experiencia en el manejo por parte del autor, se decidió utilizar Abaqus en este trabajo.

4.3.1 Introducción a Abaqus

Abaqus FEA (de las siglas en inglés *Finite Element Analysis*), o simplemente Abaqus, consiste en un programa de análisis y simulación numérica mediante elementos finitos. Su aplicación industrial es muy diversa. Permite evaluar de forma fiable diferentes alternativas en el diseño de un producto, estudiar el comportamiento de un conjunto en condiciones de trabajo o simular procesos de fabricación entre otras posibilidades.

A continuación se muestra una imagen de la ventana principal de Abaqus donde se especifican los distintos elementos que componen la misma.

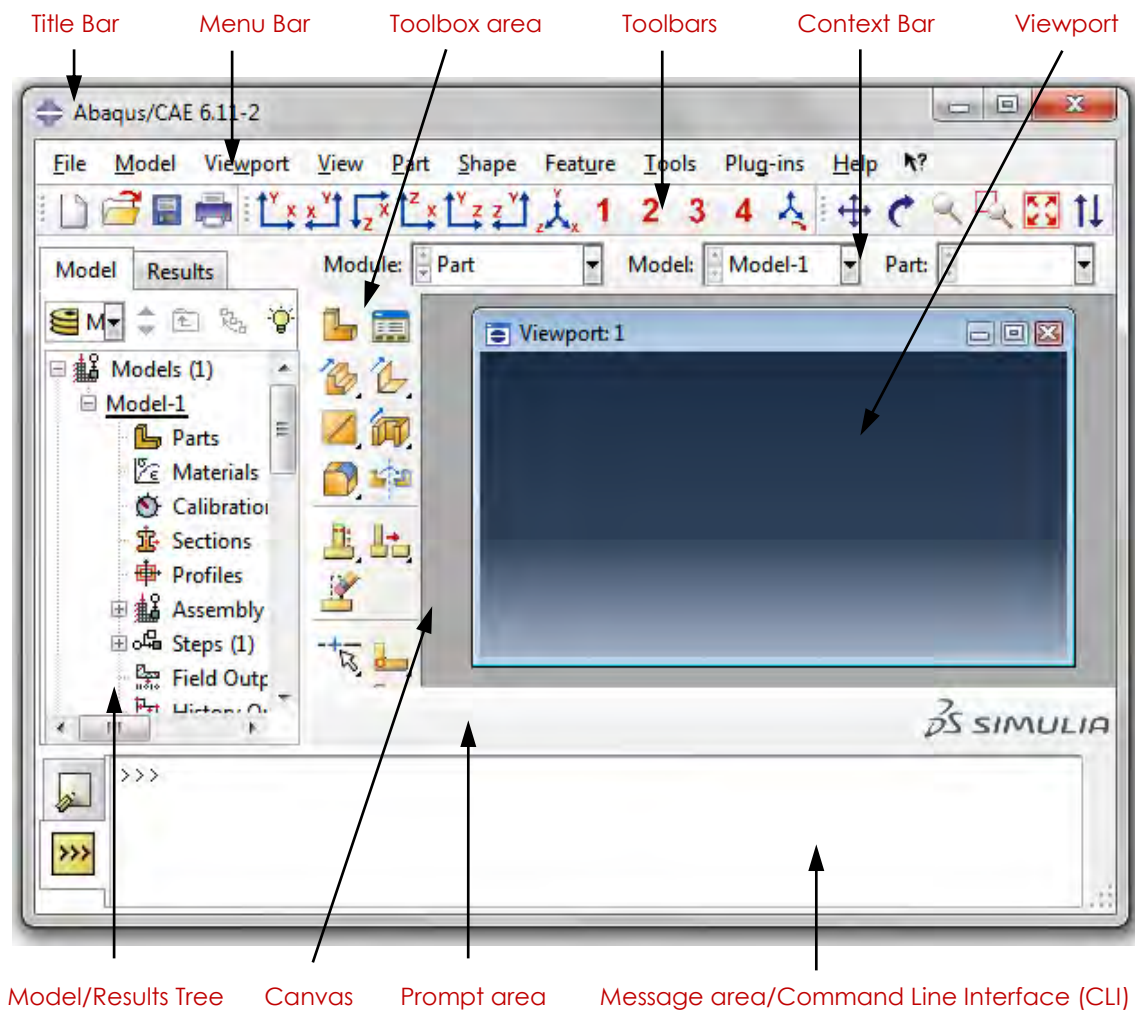


Figura 4.6: Ventana principal de Abaqus/CAE

El funcionamiento interno básico del software se puede dividir en tres etapas: preprocesamiento, procesamiento y postprocesamiento. El objeto final de la primera etapa es el *input file* (con extensión *.inp). En él queda almacenada la información relativa a la geometría, los materiales, las cargas, las condiciones de contorno, las interacciones, el mallado etc del modelo creado. Este archivo es enviado para su resolución en la etapa de procesamiento que genera un *output file* (*.odb) el cual contiene los resultados del estudio. Finalmente, en la etapa de postprocesamiento se permite la visualización y manipulación de los resultados.

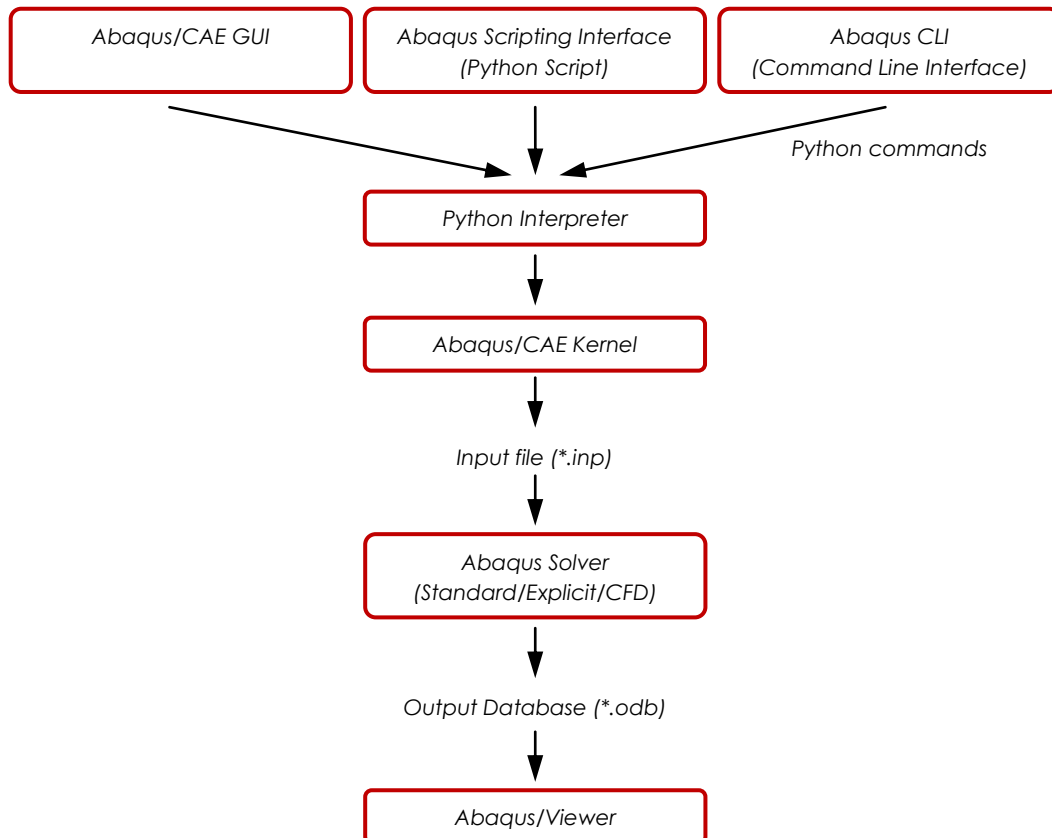


Figura 4.7: Esquema del funcionamiento interno de Abaqus

El usuario del programa solo interviene directamente en las etapas inicial y final: es decir en la creación del *input file* y en la manipulación final de los resultados. La generación del *input file* en esa primera etapa puede llevarse a cabo de varias formas diferentes.

La primera consiste en la utilización de la interfaz de Abaqus/CAE. Se encuentra estructurada en un conjunto de módulos (ver Figura 4.8) que permiten introducir la información necesaria para la creación del archivo *.inp. En este caso las acciones que lleva a cabo el usuario en la GUI (de las siglas en inglés de *Graphical User Interface*) se convierten en comandos en *Python* que tras pasar por un intérprete acceden al núcleo del programa que se encarga de generar con ellos el *input file*. Se trata de la alternativa más utilizada, ya que permite crear el modelo geométrico de forma sencilla e intuitiva utilizando las herramientas CAD de las que dispone Abaqus. Incluso es posible importar la geometría desde otros programas y definir en Abaqus el resto de los pasos necesarios.

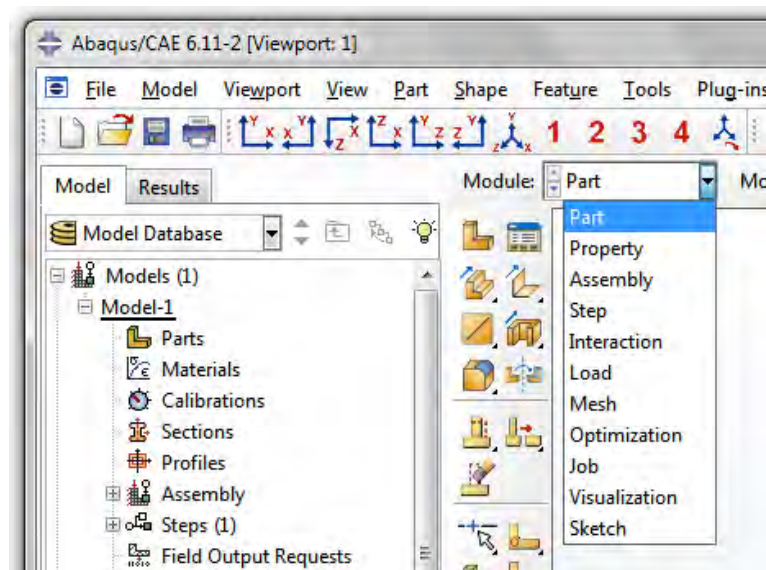


Figura 4.8: Detalle de la GUI de Abaqus/CAE: módulos

Por otro lado, también se pueden escribir comandos desde la *Command Line Interface* o CLI que se puede observar en la Figura 4.6.

Otra alternativa consiste en utilizar la interfaz de *Abaqus Scripting*. Para ello previamente será necesario escribir los comandos deseados en un documento de texto con la extensión *.py propios del lenguaje de programación *Python*. Al ejecutar el script (*File* → *Run Script*) los comandos son enviados al núcleo del programa que crea el archivo *.inp. Esta alternativa permite la automatización y simplificación de tareas repetitivas como la creación de los materiales, el desarrollo de modelos paramétricos o la realización de tareas de optimización. Sin embargo no es recomendable para la creación de geometrías muy complejas las cuales suelen ser creadas en la GUI o importadas desde programas externos de CAD.

Las ventajas de la programación en Abaqus son destacables en cuanto nos enfrentamos a tareas de automatización de procesos o repetitivas. Por ejemplo es común al realizar un modelo en Abaqus tener que definir las propiedades de los materiales a utilizar. Cuando el número es reducido, esto puede llevar escasos minutos pero cuando se trata de modelos complejos con gran variedad de materiales, la tarea de asignar las propiedades a todos ellos puede ser tediosa. Por tanto escribiendo un *script* que contenga la información de un conjunto de materiales nos permitirá al comienzo de cada sesión disponer de ellos en segundos. El uso de programas también facilita el tránsito de información, ya que el código que define un modelo de elevada complejidad se almacena en apenas *Kbytes* con lo que pueden ser compartidos de forma casi instantánea sin grandes requisitos de memoria. Por otro lado, tareas de optimización o parametrización de modelos en los que es necesario poder modificar dimensiones o cargas de forma rápida son también buenos ejemplos de aplicaciones en los que la programación marca la diferencia.

Por último, la complejidad y dimensión de Abaqus es enorme y puede abrumar a personal no experto o que se inicia en el manejo del programa. Conocer el lenguaje de programación que existe detrás del software nos permitirá modificar la interfaz de

Abaqus haciendo que el usuario solo tenga disponibles ciertas opciones de forma similar a lo que ocurre en una aplicación vertical.

Como ya se ha anticipado, el lenguaje de programación que se encuentra detrás de Abaqus es *Python*. Fue creado a finales de la década de los 80 por Guido van Rossum en el Centro para las Matemáticas y la Informática (CWI, *Centrum Wiskunde & Informatica*) en los Países Bajos.

A diferencia de otros lenguajes compilados como C o C++, Python es un lenguaje de programación interpretado en el que no existen compilaciones separadas ni pasos de ejecución. Directamente se ejecuta desde el código fuente. Además el hecho de ser libre y gratuito ha permitido su modificación para funcionar en diversas plataformas como Windows, Linux, Macintosh etc. Al ser un lenguaje orientado a objetos, está construido sobre ellos, combinando datos y funcionalidad.

Se trata también de un lenguaje ampliable, ya que es posible implementar funciones o módulos al intérprete de forma sencilla para realizar operaciones críticas a la máxima velocidad, utilizando para ello lenguajes como C.

Pero el aspecto más destacable es el de su simplicidad. Otros lenguajes como C++, Java etc presentan una sintaxis muy compleja a la que es necesario habituarse. En cambio en Python, la sintaxis es muy visual ya que se basa en identaciones obligatorias para separar los bloques de un programa. Además tampoco es necesario preocuparse por la declaración previa de variables ni por su tipo ya que las genera de forma automática según son utilizadas. Esto hace que todos los códigos en *Python* tengan una apariencia muy similar y sean notablemente más reducidos que los escritos en otros lenguajes.

Tabla 4.1

Comparación de la sintaxis de distintos lenguajes de programación			
C	C++	Java	Python
#include<stdio.h>	#include <iostream>	public class HolaMundo	
int main(void) { printf("Hola, mundo.\n"); return 0; }	int main(void) { std::cout << "Hola, mundo." << std::endl; }	{ public static void main(String [] args) { System.out.println("Hola, mundo."); }}	print 'Hola Mundo'

4.3.2 Definición e implementación de los enriquecimientos

Como se introdujo en apartados anteriores el XFEM permite la modelización de discontinuidades y predecir su desarrollo de forma precisa. No obstante la fiabilidad de los resultados no es sencilla de conseguir debido a problemas de convergencia principalmente. Muchos son los parámetros y alternativas que ofrece Abaqus a la hora de simular el comportamiento de las fisuras. Se realiza un estudio y desglose detallado de

todas las alternativas dentro del XFEM con el objetivo de ofrecer: por un lado una guía para futuros trabajos, y por otro posibilitar la selección de la alternativa más adecuada para la caracterización del estudio que se llevará a cabo en los capítulos venideros.

Abaqus permite llevar a cabo el análisis de los procesos de inicio y desarrollo de fisuras mediante dos de las teorías presentadas en el capítulo 2: los Modelos de Zona Cohesiva y la Mecánica de Fractura Elástico Lineal.

En primer lugar se encuentra la modelización de fisuras mediante el método de los segmentos cohesivos y nodos fantasma. Se basa en los conceptos de los CZM (ver apartado 2.2) y destaca por su versatilidad ya que es aplicable tanto a materiales frágiles como dúctiles. A diferencia de modelos también basados en conceptos cohesivos, la conjunción con el XFEM permite la propagación de las fisuras siguiendo caminos arbitrarios, superando la limitación al crecimiento por las fronteras de los elementos. En este caso la singularidad de la solución analítica en el frente de grieta se supera imponiendo que la fisura debe atravesar todo el elemento haciendo innecesario modelar esta singularidad.

Para conseguir un comportamiento de la fisura independiente de la malla, se introducen los denominados "nodos fantasma". Cuando un elemento está intacto éstos se encuentran situados en la misma posición que sus nodos homólogos reales. Cuando dicho elemento es atravesado por una fisura el elemento se divide en dos partes, cada una de ellas formada por una combinación de nodos reales y nodos fantasma como se puede observar en la Figura 4.9. Cada nodo fantasma y su homólogo real dejan de estar unidos pudiéndose mover de forma independiente.

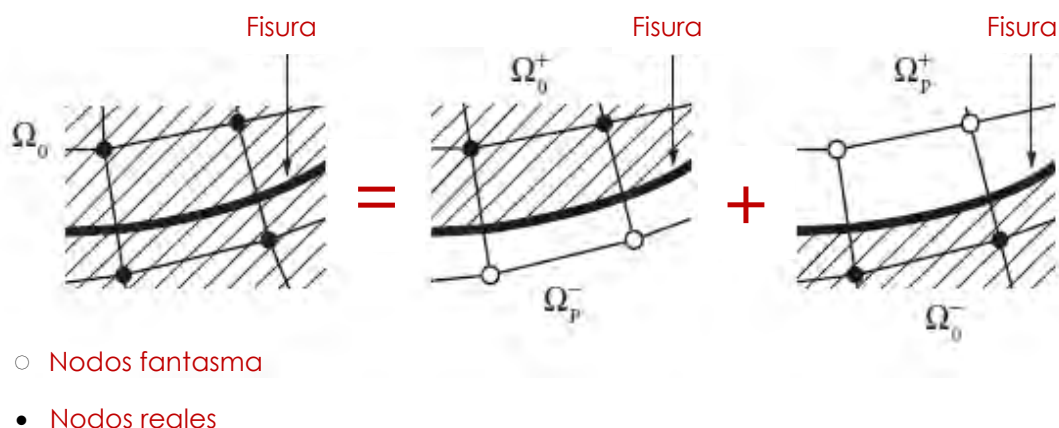


Figura 4.9: Comportamiento de los nodos fantasma durante la fractura de un elemento al propagarse la grieta (70)

Este método ha sido utilizado para la simulación del inicio y la propagación de grietas por autores como Song (71) y Remmers (72). Además se demuestra que la solución es independiente de la malla siempre y cuando esta sea lo suficientemente refinada.

En segundo lugar se encuentra la modelización de discontinuidades mediante los conceptos de la MFEL y los nodos fantasma. También en el marco del XFEM, esta alternativa se muestra apropiada para la propagación frágil de fisuras. De la misma forma que el modelo anterior, la singularidad de la solución en el frente de grieta

tampoco se considera. La tasa de liberación de energía de deformación se calcula usando la Técnica del Cierre Virtual de la Grieta (VCCT o *Virtual Crack Closure Technique*). La introducción de los nodos fantasmas, al igual que en el caso anterior, permite representar la discontinuidad del elemento fisurado. Un nodo fantasma y su homólogo se separan cuando la tasa de liberación de energía de deformación supera el valor crítico.

El factor común de ambas alternativas es, por tanto, el uso de los nodos fantasma. Para conseguir el desplazamiento independiente entre estos y los nodos reales es necesario su enriquecimiento con grados de libertad adicionales, los cuales solo serán activados cuando se produzca la fractura del elemento al que pertenecen. Las bases teóricas de este procedimiento quedan descritas en el apartado 4.2 pero es necesario conocer como implementar esta característica en Abaqus.

A continuación, y para facilitar al lector el manejo del XFEM, se muestra el recorrido a seguir para crear un enriquecimiento tanto a través de la interfaz Abaqus/CAE como utilizando el *input file*. Este procedimiento será el utilizado para describir, de aquí en adelante, la implementación de las distintas características.

- Input file (*.inp): *ENRICHMENT
- Abaqus/CAE: Interaction module: Special → Crack → Create → XFEM

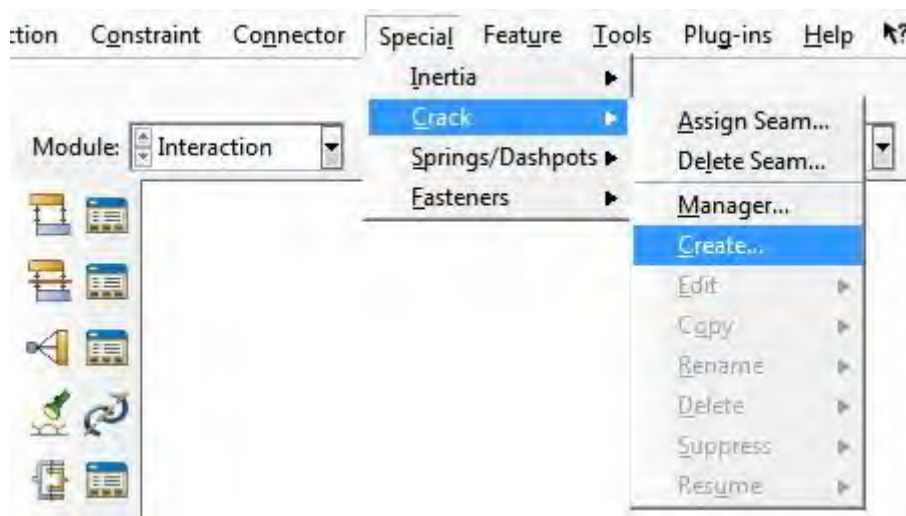


Figura 4.10: Creación del enriquecimiento dentro del modulo *Interaction*

El siguiente paso consiste en asignar un nombre al enriquecimiento aunque es posible utilizar el que aparece por defecto.

- Input file (*.inp): *ENRICHMENT, NAME = *name*
- Abaqus/CAE: Interaction module: Special → Crack → Create: XFEM: Name: *name*

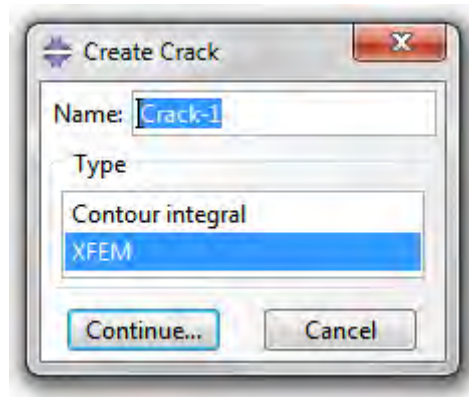


Figura 4.11: Asignar un nombre al enriquecimiento

Una vez creado, es necesario definir el tipo de enriquecimiento a implementar. Abaqus permite elegir entre modelar una grieta estacionaria o la propagación de una grieta a lo largo de un camino arbitrario que depende de la solución. En el primer caso se exige que los elementos atravesados por la fisura sean enriquecidos con la función de salto de Heaviside a través de las caras de la fisura. Las grietas móviles, en cambio, serán modeladas usando uno de las dos alternativas mencionados anteriormente.

La implementación de una grieta estacionaria se realiza como sigue:

- Input file (*.inp): *ENRICHMENT, TYPE = STATIONARY CRACK
- Abaqus/CAE: Interaction module: Crack editor: Desactivar *Allow crack growth*

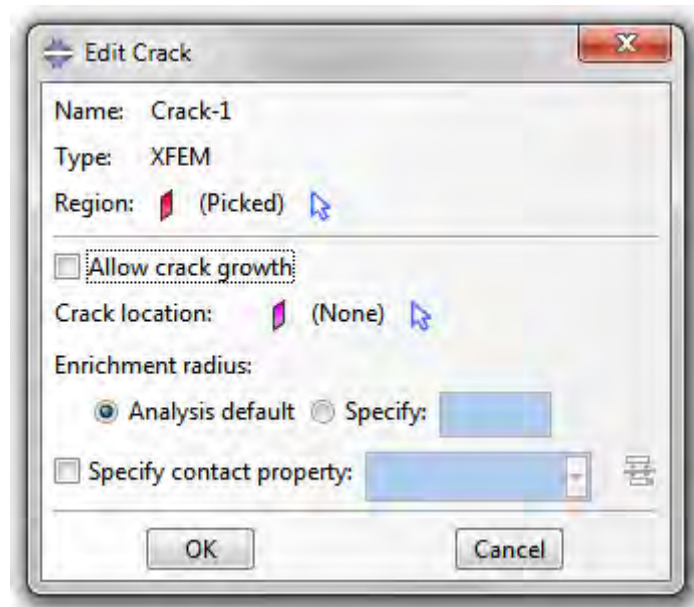


Figura 4.12: Grieta estacionaria

En el caso de modelar la propagación de una grieta:

- Input file (*.inp): *ENRICHMENT, TYPE = PROPAGATION CRACK
- Abaqus/CAE: Interaction module: Crack editor: Activar *Allow crack growth*

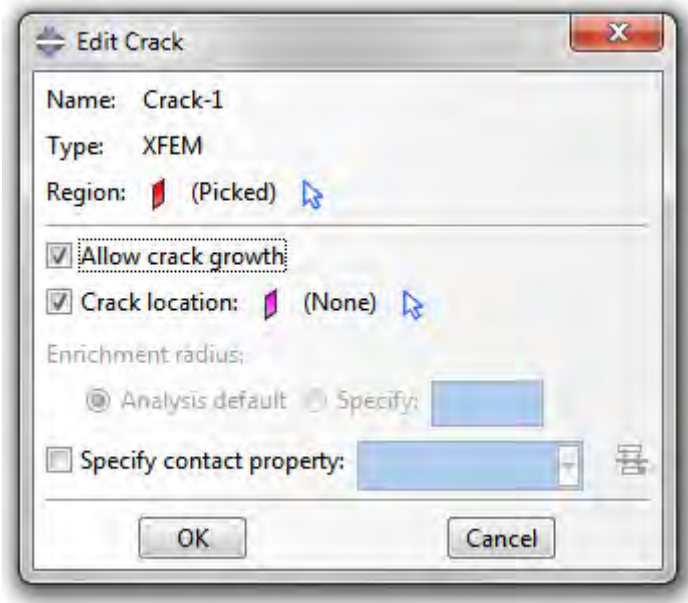


Figura 4.13: Grieta móvil

Es necesario también identificar la región enriquecida. Únicamente los grados de libertad de los nodos dentro de esta región podrán ser enriquecidos en el caso de propagación de una grieta. Se deben seleccionar aquellos elementos que ya se encuentran atravesados por fisuras y los que es probable que se encuentren en la misma situación que estos cuando la grieta progrese.

- Input file (*.inp): *ENRICHMENT, ELSET = *element set name*
- Abaqus/CAE: Interaction module: Special → Crack → Create: XFEM: Select the crack domain: *select region*

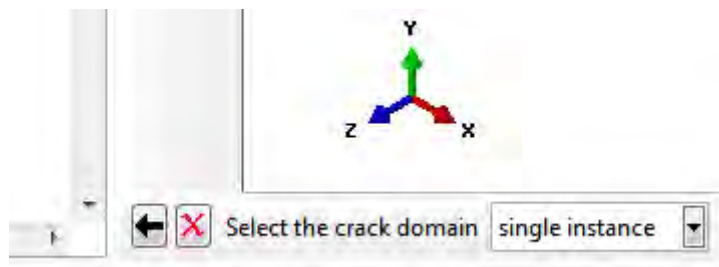


Figura 4.14: Seleccionar el dominio por el que se propagará la grieta

Cuando un elemento es atravesado por una fisura se crean dos superficies enfrentadas cuyo comportamiento a compresión debe ser considerado. La formulación que controla dicho comportamiento es muy similar al usado para el contacto de pequeños deslizamientos entre superficies. Sin embargo la fricción en la dirección tangencial no está aún considerada. Utilizando los conceptos de la MFEL se asume que la resistencia cohesiva del elemento atravesado es nula, por lo que el comportamiento de las superficies de la grieta a compresión cuando estas entran en contacto está completamente definido. Cuando se usa la alternativa de los segmentos cohesivos CZM la situación es más compleja puesto que no solo hay que considerar el comportamiento a compresión en el elemento fisurado. El comportamiento cohesivo de

tracción-separación también influye. En la dirección normal al contacto la relación *pressure-overclosure* que rige el comportamiento a compresión entre las superficies no interactúa con el comportamiento cohesivo ya que cada una describe el comportamiento en situaciones diferentes: la relación *pressure-overclosure* rige el comportamiento solo cuando la fisura está cerrada, mientras que el comportamiento cohesivo lo hace cuando está abierta.

Si la rigidez cohesiva de un elemento está intacta en la dirección tangencial, se asume que el comportamiento cohesivo está activo, con lo que cualquier deslizamiento tangencial genera tensión tangencial puesto que la resistencia cohesiva del elemento está exigida. Cuando comienza el daño en el elemento la contribución cohesiva a las tensiones tangenciales que evitan la rotura del elemento se va reduciendo hasta alcanzar un valor nulo. Esta evolución del daño será implementada más adelante.

De momento para definir esta interacción se procede como sigue:

- Input file (*.inp): *ENRICHMENT, INTERACTION = *interaction property name*
 *SURFACE INTERACTION, NAME = *interaction property name*
 *SURFACE BEHAVIOUR
- Abaqus/CAE: Interaction module: Crack editor: Activar *Specify contact property*

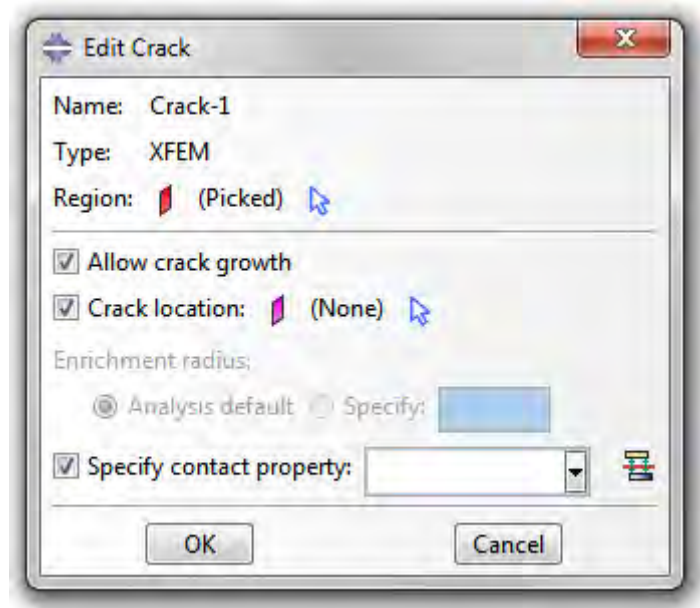


Figura 4.15: Especificar las propiedades del contacto

Por último, una de las principales ventajas del XFEM es que permite modelar la fisura de forma independiente al dominio por el que se propagará. De esta forma, si el elemento a estudiar presenta una fisura será necesario seleccionarla. En el caso de una grieta estacionaria esta opción es obligatoria pero en el caso de la propagación de una fisura es necesario activarla (ver Figura 4.15).

- Input file (*.inp): *ENRICHMENT, ELSET = *element set name*
- Abaqus/CAE: Interaction module: Crack editor: Activar *Specify contact property* → Select the crack location: *select region*

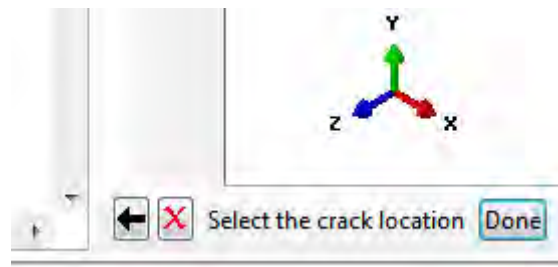


Figura 4.16: Seleccionar el dominio que constituye la grieta

4.3.3 Definición e implementación de los mecanismos de daño

Si bien a la hora de definir los enriquecimientos, las dos alternativas son tratadas de la misma forma, para implementar los mecanismos de daño se siguen caminos diferentes. En el caso de los modelos cohesivos se llevará a cabo durante la definición de las propiedades del material mientras que en el caso de la MFEL se realizará al definir las propiedades de interacción de la grieta. A continuación se expondrán los pasos a seguir para llevar a cabo un estudio utilizando cualquiera de ambas alternativas.

4.3.3.1 XFEM basado en modelos cohesivos

El desarrollo teórico de los CZM (ver apartado 2.2) se basa en la utilización de la TSL. La representación gráfica básica de esta ley se presenta en la Figura 2.9 donde aparecen indicadas las distintas etapas que caracterizan el mecanismo de daño sobre los elementos cohesivos. A continuación se desarrollarán conceptualmente y se indicará la forma de implementarlas en Abaqus.

4.3.3.1.1 Comportamiento previo al daño

Abaqus asume inicialmente un comportamiento elástico lineal del material. Este comportamiento elástico se desarrolla mediante la relación entre tensiones y deformaciones nominales a través de la matriz constitutiva. Las tensiones nominales son las distintas componentes de la fuerza divididas entre el área inicial de cada uno de los puntos de integración. Las deformaciones nominales se calculan de forma análoga dividiendo los desplazamientos de los puntos de integración ($\delta_n, \delta_t, \delta_s$) entre el espesor original de los mismos e_0 . De esta forma tanto el vector de tensiones nominales \mathbf{t} como el de deformaciones nominales $\boldsymbol{\varepsilon}$ presentan tres componentes: una normal, t_n y ε_n , y dos tangenciales, t_t, t_s y $\varepsilon_t, \varepsilon_s$. Con todo ello, el comportamiento elástico puede escribirse:

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_n \\ t_s \\ t_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & K_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & K_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_s \\ \varepsilon_t \end{Bmatrix} = \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}$$

4.30

donde K_{nn} , K_{ss} y K_{tt} se calculan en base a las propiedades elásticas del material en los elementos enriquecidos. Por tanto es suficiente con introducir en Abaqus el Módulo de Elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν para un material elástico isótropo.

- Input file (*.inp): *ELASTIC, TYPE = ISOTROPIC
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Elasticity → Elastic: Type: Isotropic → Rellenar tabla

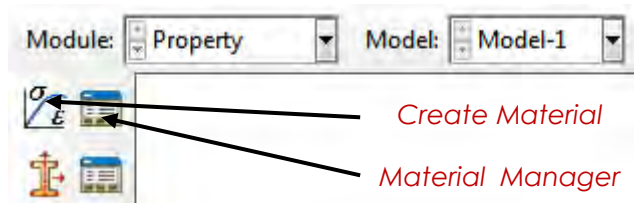


Figura 4.17: Detalle del Módulo Property. Create Material y Material Manager

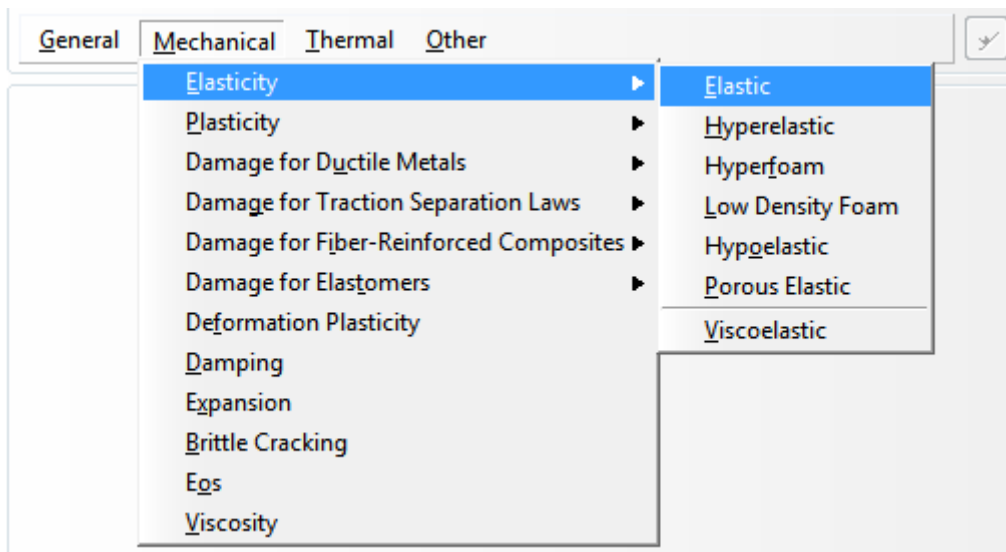


Figura 4.18: Detalle del Material editor. Selección de un material elástico

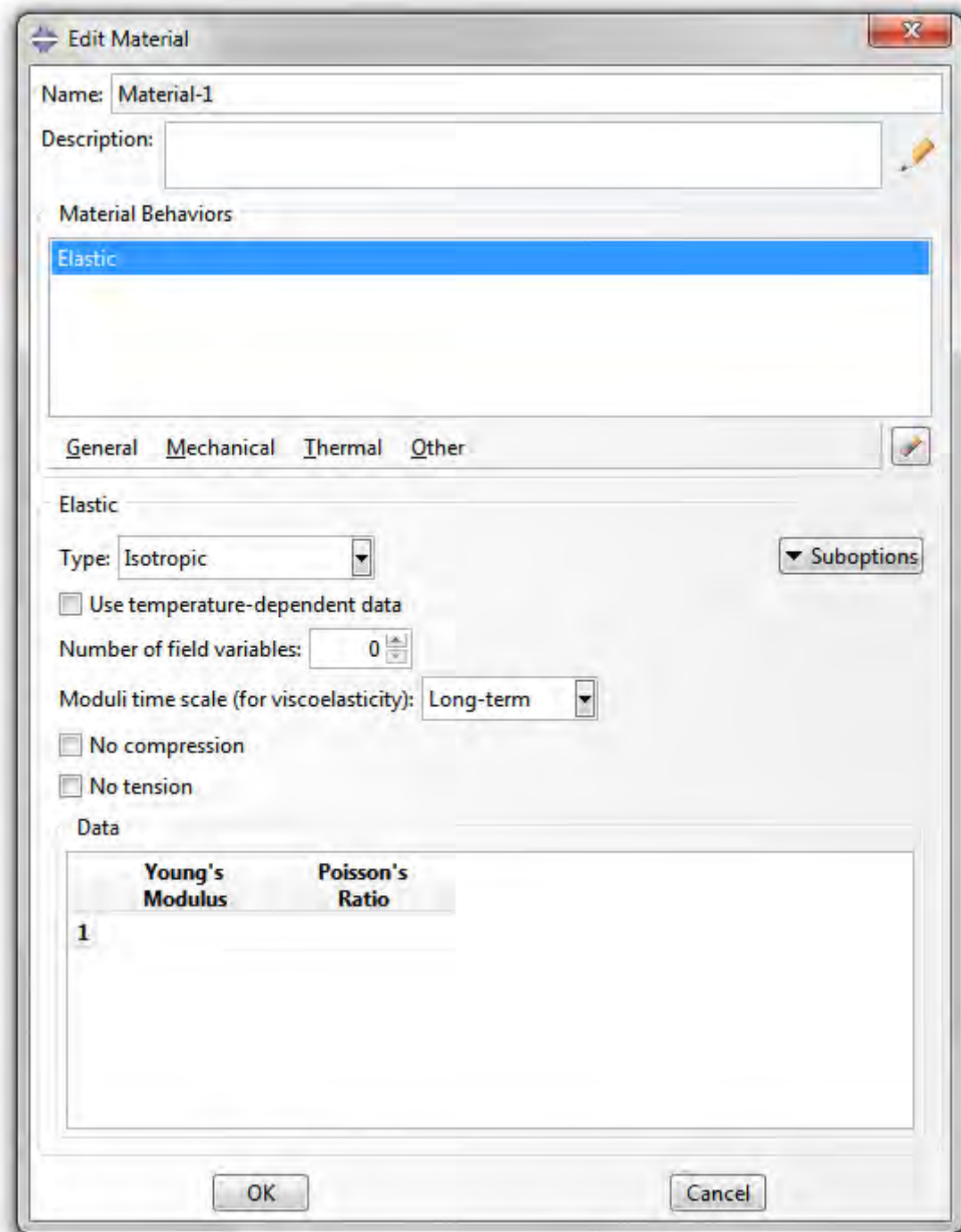


Figura 4.19: Parámetros requeridos para definir el comportamiento de un material elástico isotrópico

4.3.3.1.2 Inicio del daño

Como el propio nombre indica, el inicio del daño hace referencia al comienzo de la degradación de la respuesta de un elemento enriquecido y en el caso de esta alternativa se hace uso de la Ley de Tracción-Separación (ver apartado 2.2.1). Este proceso se inicia cuando las tensiones o deformaciones existentes satisfacen el criterio de inicio del daño seleccionado por el usuario. En general, una grieta puede nuclearse o

extenderse si esta variable f alcanza el valor 1 dentro de una determinada tolerancia f_{tol} .

$$1 \leq f \leq 1 + f_{tol}$$

4.31

Si $f > 1 + f_{tol}$ el incremento de tiempo en el *step* se reduce hasta que se satisfaga el criterio. Este requisito provoca en ocasiones problemas de convergencia ya que el procesador aborta el estudio cuando realiza varios intentos en un mismo incremento. Por ello Abaqus ofrece la posibilidad de especificar el valor de esta tolerancia (0.05 por defecto) para intentar resolver estos problemas de convergencia (ver *Tolerance* en la Figura 4.21).

- Input file (*.inp): *DAMAGE INITIATION, TOLERANCE = f_{tol}
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Tolerance: f_{tol}

Abaqus presenta distintos criterios para modelar el inicio del daño (ver Figura 4.20) y los cuales se discuten más adelante.

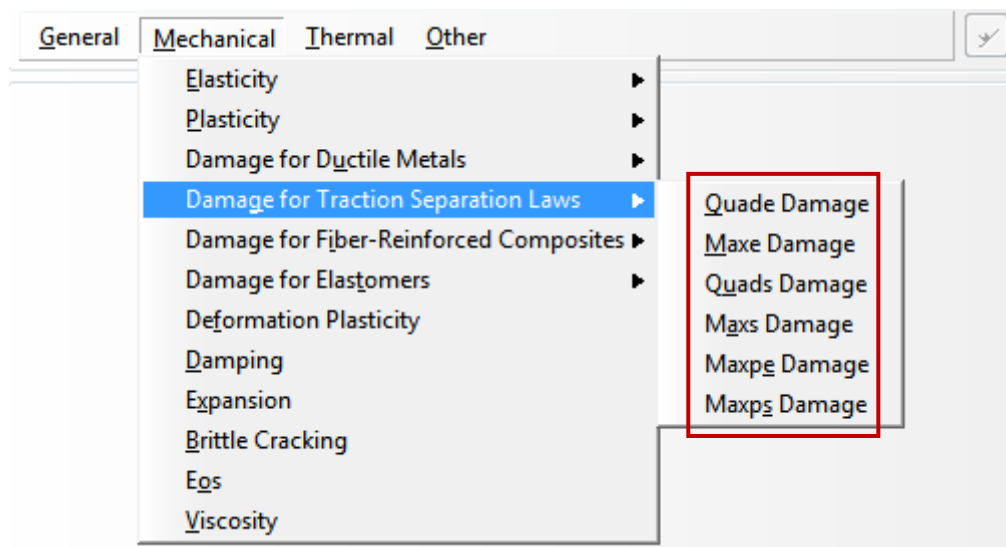


Figura 4.20: Selección del criterio de inicio del daño siguiendo la TSL

1. Criterio de la Máxima Tensión Principal o MAXPS

Este criterio se representa mediante la siguiente expresión:

$$f = \left\{ \frac{\langle \sigma_{max} \rangle}{\sigma_{max}^0} \right\}$$

4.32

donde σ_{max}^0 representa la máxima tensión principal permitida y que será el valor a proporcionar por el usuario (ver Figura 4.21) y los paréntesis de Macaulay $\langle \dots \rangle$ representan que deformaciones o tensiones de compresión no son capaces de iniciar el daño. El daño comienza cuando $f = 1$.

- Input file (*.inp): *DAMAGE INITIATION,CRITERION = MAXPS
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Maxps Damage

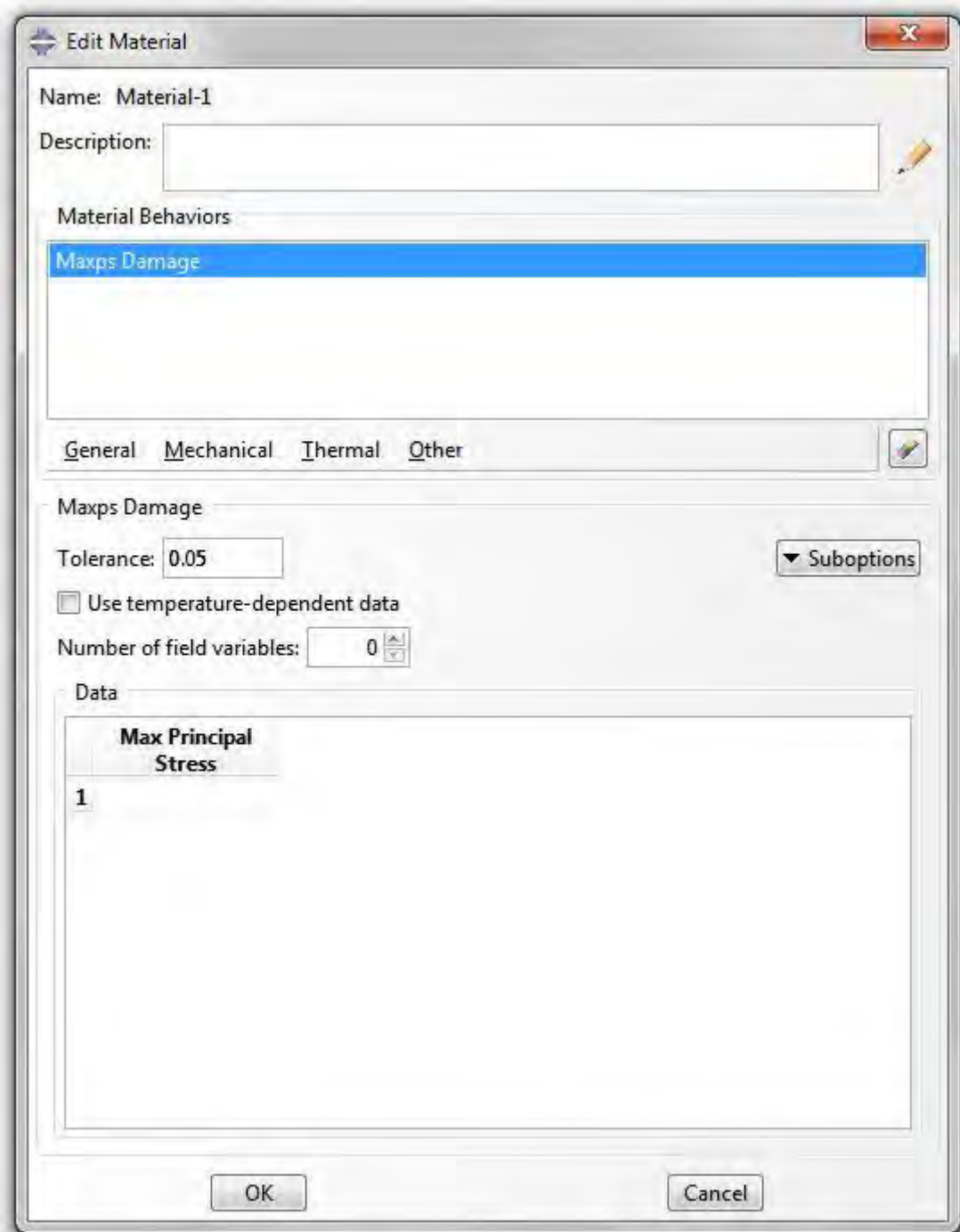


Figura 4.21: Parámetros a introducir en el caso de seleccionar *Maxps Damage* como criterio de inicio del daño

2. Criterio de la Máxima Deformación Principal o MAXPE

Este criterio se representa mediante la siguiente expresión:

$$f = \left\{ \frac{\langle \varepsilon_{max} \rangle}{\varepsilon_{max}^0} \right\}$$

4.33

donde ε_{max}^0 representa la máxima deformación principal permitida que será el valor a introducir (ver Figura 4.22). El daño comienza cuando $f = 1$.

- Input file (*.inp): *DAMAGE INITIATION, CRITERION = MAXPS
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Maxpe Damage → Rellenar tabla



Figura 4.22: Parámetros a introducir en el caso de seleccionar *Maxpe Damage* como criterio de inicio del daño

3. Criterio de la Máxima Tensión Nominal o MAXS

Este criterio se representa mediante la siguiente expresión:

$$f = \max \left\{ \frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0}, \frac{t_s}{t_s^0}, \frac{t_t}{t_t^0} \right\}$$

4.34

donde t_n^0 , t_s^0 y t_t^0 representan los valores máximos de tensión nominal pura para la dirección normal y las dos tangenciales respectivamente siendo, en este caso los valores requeridos por Abaqus (ver Figura 4.23). El daño comienza cuando $f = 1$.

- Input file (*.inp): *DAMAGE INITIATION, CRITERION = MAXS
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Maxs Damage → Rellenar tabla

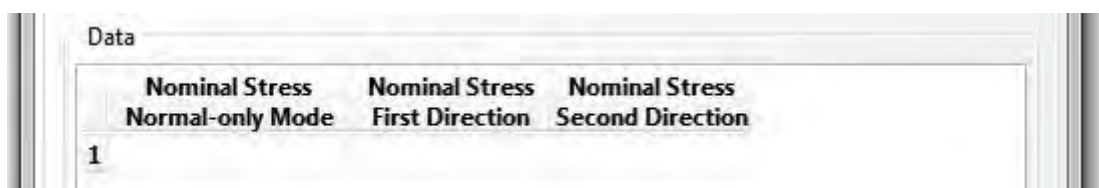


Figura 4.23: Parámetros a introducir en el caso de seleccionar *Maxs Damage* o *Quads Damage* como criterios de inicio del daño

4. Criterio de la Máxima Deformación Nominal o MAXE

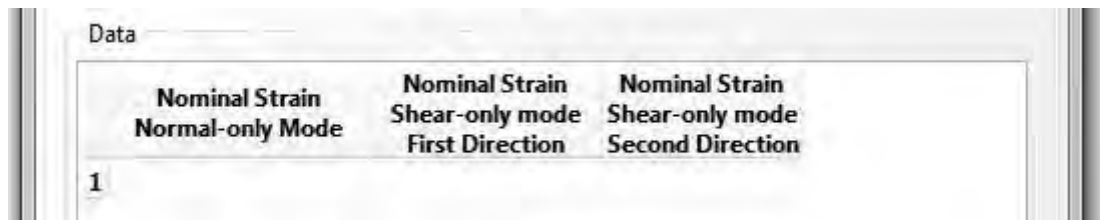
Este criterio se representa mediante la siguiente expresión:

$$f = \max \left\{ \frac{\langle \varepsilon_n \rangle}{\varepsilon_n^0}, \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0}, \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^0} \right\}$$

4.35

donde ε_n^0 , ε_s^0 y ε_t^0 representan los valores máximos de deformación nominal pura para la dirección normal y las dos tangenciales respectivamente. En la Figura 4.24 se muestra la tabla a rellenar con estos parámetros. El daño comienza cuando $f = 1$.

- Input file (*.inp): *DAMAGE INITIATION, CRITERION = MAXE
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Maxe Damage → Rellenar tabla



	Nominal Strain Normal-only Mode	Nominal Strain Shear-only mode First Direction	Nominal Strain Shear-only mode Second Direction
1			

Figura 4.24: Parámetros a introducir en el caso de seleccionar *Maxe Damage* o *Quade Damage* como criterios de inicio del daño

5. Criterio de Tensión Cuadrática o QUADS

Este criterio se representa mediante la siguiente expresión:

$$f = \left\{ \frac{\langle t_n \rangle}{t_n^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{t_s}{t_s^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{t_t}{t_t^0} \right\}^2$$

4.36

donde t_n^0 , t_s^0 y t_t^0 representan los valores máximos de tensión nominal pura para la dirección normal y las dos tangenciales respectivamente. Se introducen en forma de tabla como se muestra en la Figura 4.23. El daño comienza cuando $f = 1$.

- Input file (*.inp): *DAMAGE INITIATION, CRITERION = QUADS
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quads Damage → Rellenar tabla

6. Criterio de Deformación Cuadrática o QUADE

Este criterio se representa mediante la siguiente expresión:

$$f = \left\{ \frac{\langle \varepsilon_n \rangle}{\varepsilon_n^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^0} \right\}^2 + \left\{ \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^0} \right\}^2$$

4.37

donde ε_n^0 , ε_s^0 y ε_t^0 representan los valores máximos de deformación nominal pura para la dirección normal y las dos tangenciales respectivamente. Abaqus solicita estos valores mediante una tabla como aparece en la Figura 4.24. El daño comienza cuando $f = 1$.

- Input file (*.inp): *DAMAGE INITIATION, CRITERION = QUADE
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage → Rellenar tabla

Un último aspecto en cuanto al inicio del daño se refiere, consiste en especificar la dirección de propagación de la grieta. En el caso de los criterios de Máxima Tensión Principal (MAXPS) y Máxima Deformación Principal (MAXPE) esta dirección está predefinida ya que la fisura es siempre ortogonal a la dirección de la máxima tensión o deformación principal. Sin embargo para el resto de los criterios es necesario especificar la dirección en que la fisura se propagará: dirección local 1 (por defecto) o local 2 del elemento fisurado.

- Input file (*.inp): *DAMAGE INITIATION, NORMAL DIRECTION = 1 (Default)
*DAMAGE INITIATION, NORMAL DIRECTION = 2
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage o Maxs Damage: direction relative to local 1-direction (for XFEM): Normal or Parallel

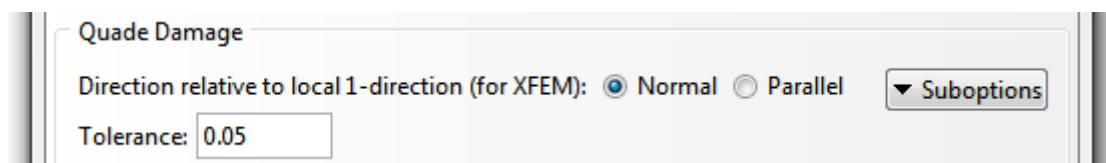


Figura 4.25: Detalle *Edit Material*: seleccionar la dirección de propagación de la fisura en el caso de seleccionar *Quade Damage*, *Maxe Damage*, *Quads Damage* o *Maxs Damage* como criterios de inicio del daño.

4.3.3.1.3 Evolución del daño

La ley de evolución del daño describe la velocidad a la que se degrada la rigidez cohesiva de un elemento en el que se ha alcanzado el criterio de inicio del daño. Este daño es descrito por la tasa de liberación de energía G y por la denominada variable de daño D . Ésta inicialmente presenta un valor nulo -el elemento no presenta daño- y, si se permite la evolución del daño⁴, este valor podrá evolucionar hasta 1, momento en el cual el elemento se encuentra completamente dañado. La variable

⁴ Abaqus permite estudiar el inicio del daño de forma independiente a la evolución del mismo, es decir, implementar un criterio de inicio del daño no exige establecer un modelo de evolución del mismo.

del daño se define, para un modo de fractura determinado m , como la relación entre el desplazamiento del frente de grieta en un instante determinado δ_m y el desplazamiento crítico de la misma δ_m^f (cuando se produce la fractura del material).

$$D_m = \frac{\delta_m}{\delta_m^f}$$

4.38

La Figura 4.26 representa una curva tracción-separación con una evolución de daño lineal en la cual se pueden observar estos parámetros.

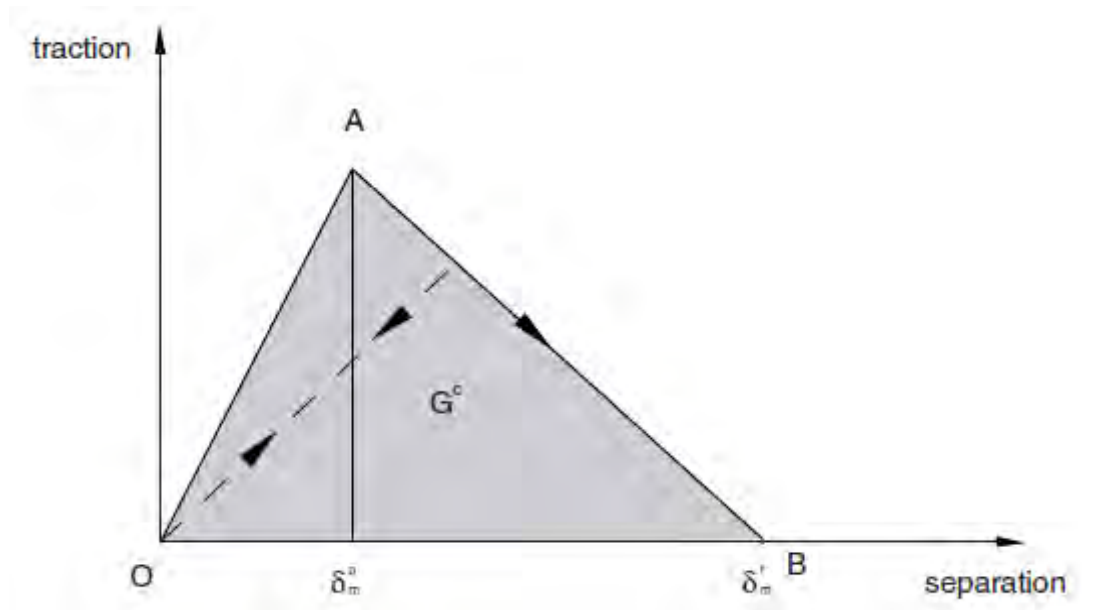


Figura 4.26: Curva Tracción-Separación de evolución lineal del daño

También se observa que la tasa de liberación de energía G se corresponde con el área bajo la curva. En la imagen se presenta el valor crítico G^c supuesta la evolución del elemento hasta el fallo. En general se calculará como:

$$G_m^c = \int_0^{\delta_m^f} t(\delta_m) d\delta_m$$

4.39

donde $t(\delta_m)$ representa la tensión según el desplazamiento del frente de grieta.

Además como se puede observar en la Figura 4.26 este valor de tensión se ve afectado por la evolución del daño y por tanto por el valor de D . El valor de la componente normal y las dos tangenciales de la tensión nominal se ve modificado según evoluciona este parámetro de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$t_n = \begin{cases} (1 - D) T_n & T_n \geq 0 \\ T_n & T_n < 0 \end{cases}$$

4.40

$$t_s = (1 - D) T_s$$

4.41

$$t_t = (1 - D) T_t$$

4.42

donde T_n , T_s y T_t son las componentes normal y tangencial que predice el comportamiento elástico sin tener en cuenta el daño.

Para describir la evolución del daño en caso de presentarse una combinación de desplazamientos (separaciones en el frente de grieta) normales y tangenciales, se define un desplazamiento efectivo:

$$\delta_m = \sqrt{\langle \delta_n \rangle^2 + \delta_s^2 + \delta_t^2}$$

4.43

La implementación en Abaqus de la evolución daño se lleva a cabo según se presenta a continuación.

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Maxe Damage, Quads Damage, Maxs Damage, Maxpe Damage o Maxps Damage → Suboptions → Damage evolution

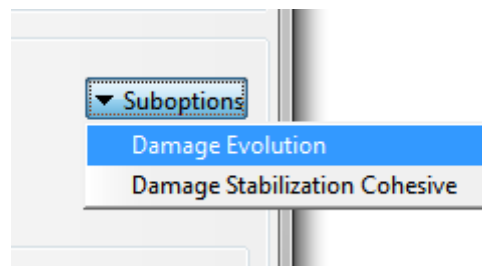


Figura 4.27: Detalle del *Material editor* para seleccionar la evolución del daño tras haber seleccionado uno de los criterios de inicio del mismo

No obstante son muchos los parámetros susceptibles de ser modificados dentro de definición de la evolución del daño. A continuación se muestra el modo de implementar todas esas posibilidades en el modelo.

1. Evolución del daño basado en el desplazamiento efectivo

Cuando se utiliza esta alternativa para implementar la evolución del daño es necesario definir, entre otros parámetros, el valor de $\delta_m^f - \delta_m^0$ para los m modos de fractura presentes (ver *Displacement at Failure* en la Figura 4.28)

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = DISPLACEMENT
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Displacement

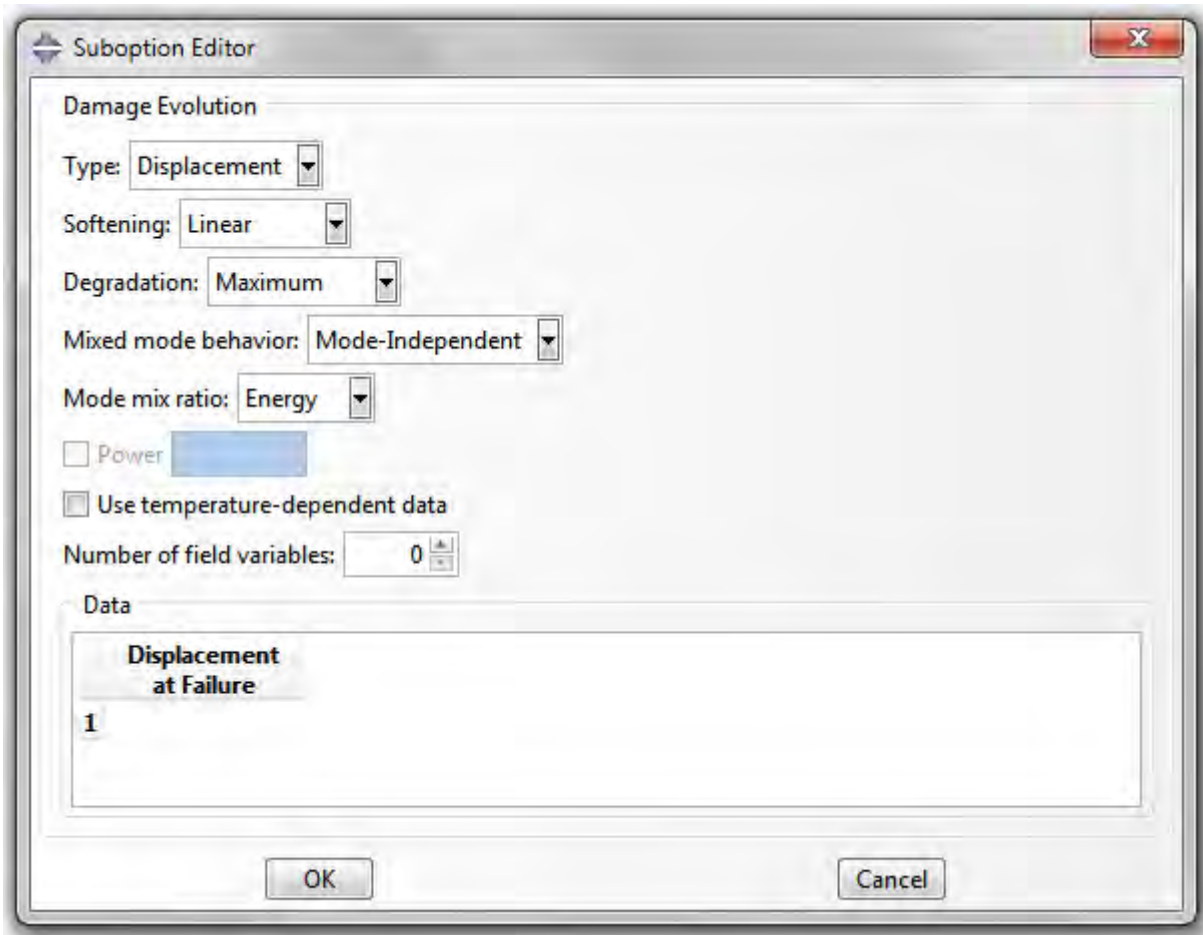


Figura 4.28: Definición de la evolución del daño basado en el desplazamiento efectivo

Por un lado se debe seleccionar una de las distintas leyes que definen la evolución de la variable de daño D según se degrada el elemento cohesivo. Abaqus propone tres alternativas entre las que elegir.

1. Evolución lineal

En este caso Abaqus utiliza la formulación desarrollada por Camanho y Dávila (73) y que se escribe como sigue:

$$D = \frac{\delta_m^f (\delta_m^{max} - \delta_m^0)}{\delta_m^{max} (\delta_m^f - \delta_m^0)}$$

4.44

donde δ_m^{max} representa, de aquí en adelante, el valor máximo del desplazamiento efectivo. La representación de este modelo se puede observar en la Figura 4.26.

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = DISPLACEMENT, SOFTENING = LINEAR
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Displacement: Softening: Linear

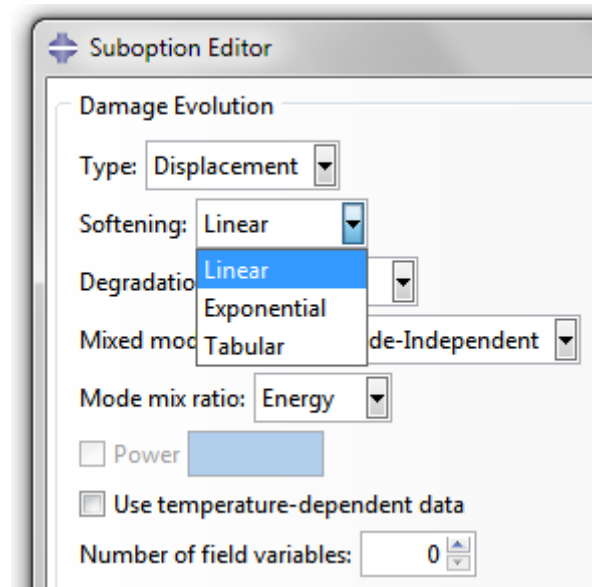


Figura 4.29: Implementación de la evolución lineal, exponencial o tabular del daño

2. Evolución exponencial

La expresión que utiliza Abaqus a la hora de implementar este tipo de evolución se escribe:

$$D = 1 - \left\{ \frac{\delta_m^0}{\delta_m^{max}} \right\} \left\{ 1 - \frac{1 - e^{\left(-\alpha \left(\frac{\delta_m^{max} - \delta_m^0}{\delta_m^f - \delta_m^0} \right) \right)}}{1 - e^{(-\alpha)}} \right\}$$

4.45

donde α es un parámetro adimensional que depende del material y que es necesario proporcionar al programa además del valor crítico del despla-

miento que ya era requerido en el caso de la evolución lineal (ver Figura 4.31). Una posible representación gráfica se presenta a continuación.

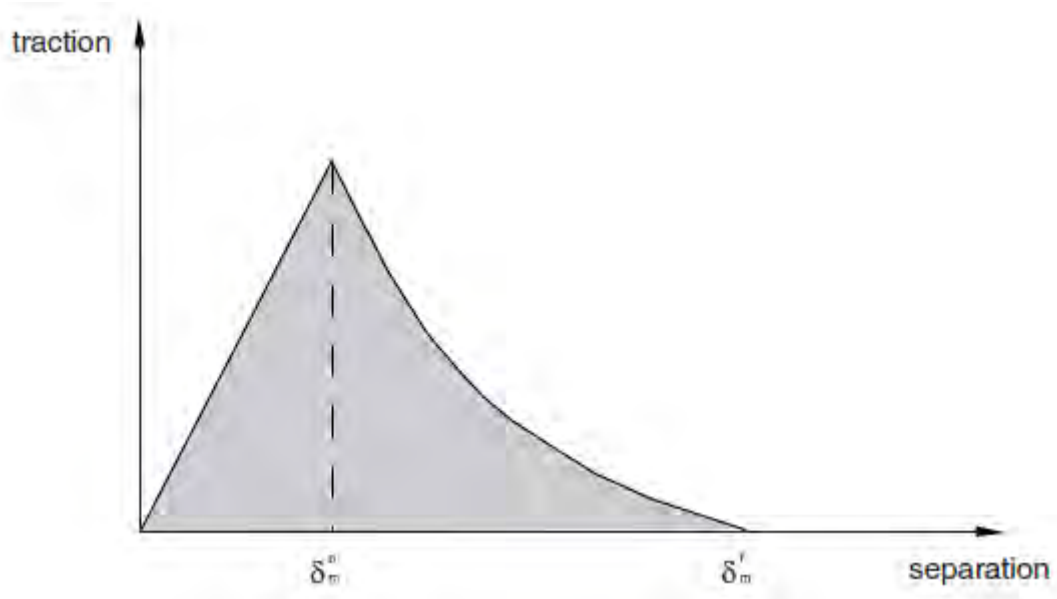


Figura 4.30: Gráfica Tracción-Separación con una evolución exponencial del daño

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = DISPLACEMENT, SOFTENING = EXPONENTIAL
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Displacement: Softening: Exponential → Rellenar tabla

Data	
Displacement at Failure	Exponential Law Parameter
1	

Figura 4.31: Parámetros necesarios para caracterizar la evolución lineal del daño

3. Evolución tabular

Abaqus permite introducir un modelo de evolución para D en función del desplazamiento efectivo como valores contenidos en una tabla.

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = DISPLACEMENT, SOFTENING = TABULAR
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs

Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Displacement: Softening: Tabular→ Rellenar tabla

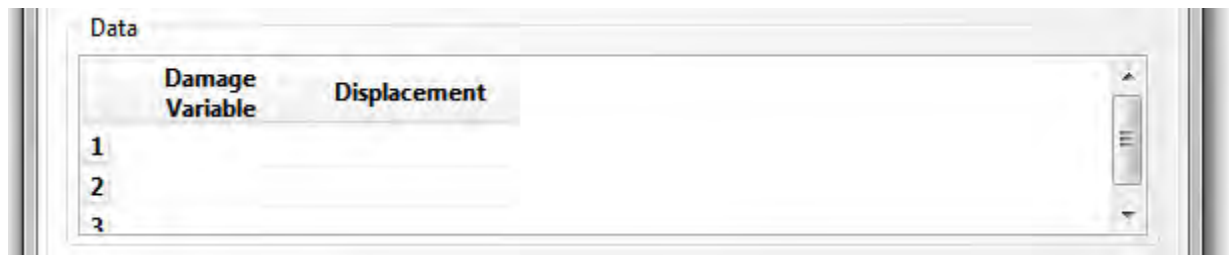


Figura 4.32: Parámetros necesarios para definir una evolución tabular del daño

En cuanto al comportamiento en modo mixto se permite seleccionar entre un comportamiento independiente del modo de fractura o uno tabular⁵.

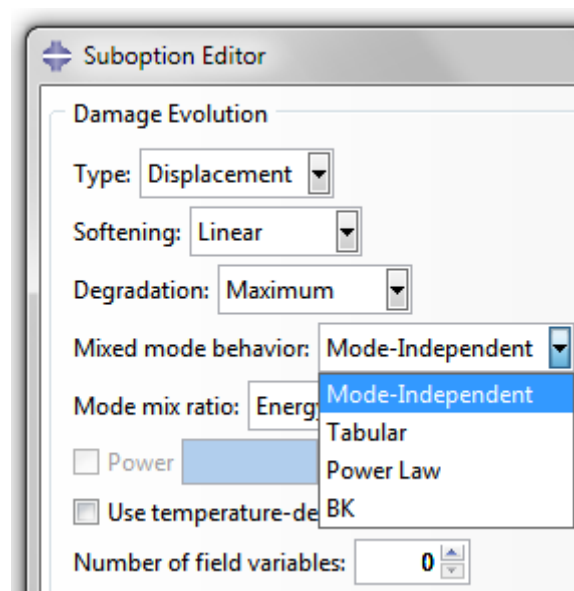


Figura 4.33: Tipos de comportamiento en modo mixto basado en desplazamientos

1. Independiente del modo

Es la opción que aparece por defecto y permite establecer un comportamiento sin tener en cuenta el modo de fractura.

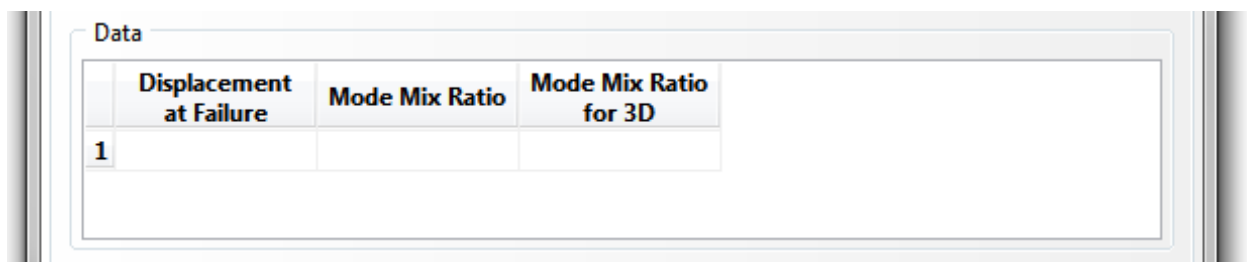
- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = DISPLACEMENT, MIXED MODE BEHAVIOUR = MODE INDEPENDENT
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quad Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Displacement: Mixed Mode Behaviour: Mode Independent

⁵ Las opciones *Power Law* y *BK* no están disponibles en el caso de trabajar con desplazamientos efectivos.

2. Tabular

Con esta selección se posibilita especificar el comportamiento en modo mixto introduciendo los valores de desplazamientos o separaciones en el frente de la grieta frente a los índices de modo mixto (ver página 104) en forma de tabla.

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = DISPLACEMENT, MIXED MODE BEHAVIOUR = TABULAR
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Displacement: Mixed Mode Behaviour: Tabular → Rellenar tabla



	Displacement at Failure	Mode Mix Ratio	Mode Mix Ratio for 3D
1			

Figura 4.34: Parámetros requeridos para una descripción tabular del modo mixto de fractura

2. Evolución del daño basado en la energía de fractura

Consiste en definir la evolución del daño en función de la energía disipada durante el proceso de daño, también denominada energía de fractura, y que viene representada por el área bajo la curva tensión-separación. Será necesario introducir, entre otros parámetros, el valor de esta energía de forma análoga al caso anterior basado en desplazamientos efectivos.

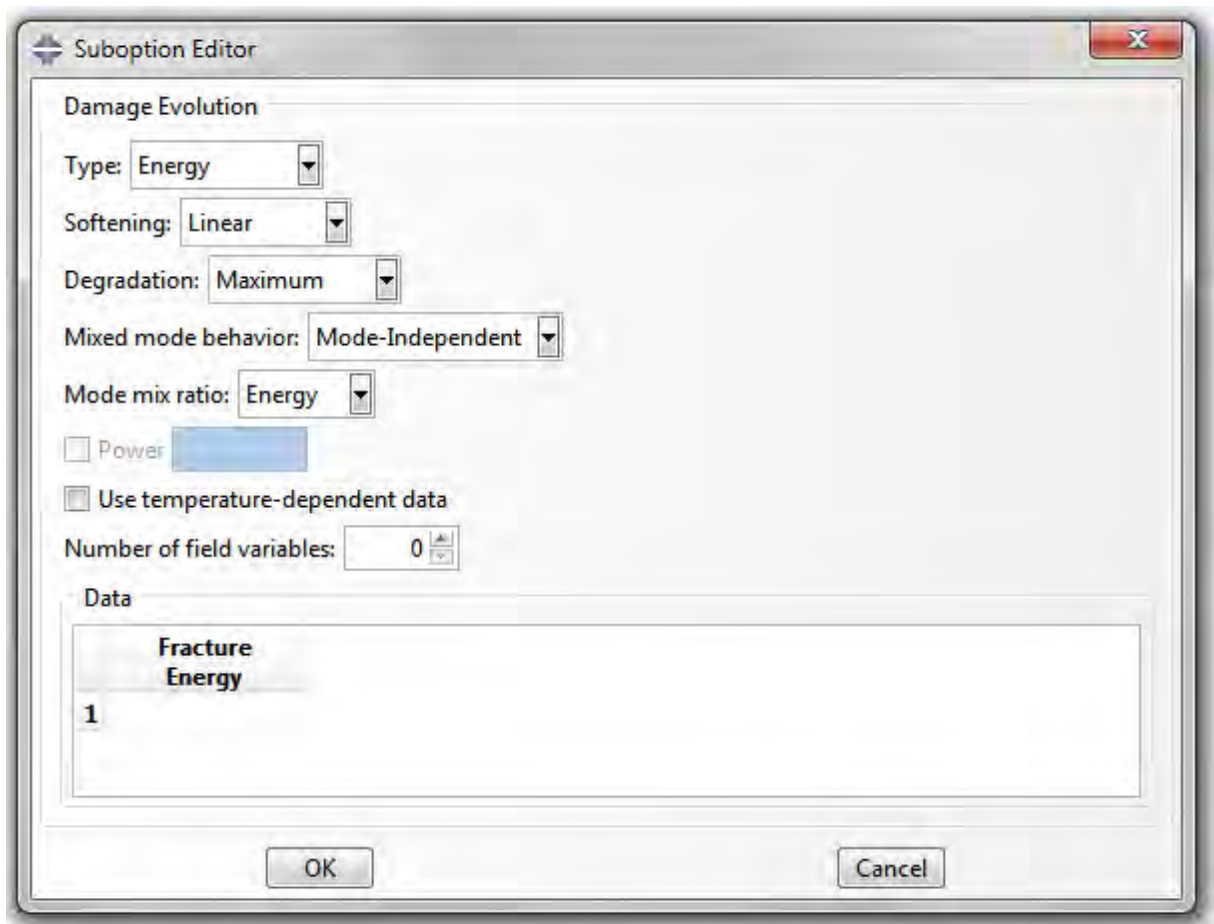


Figura 4.35: Definición de la evolución del daño basado en energías

Es necesario seleccionar el modo en que la variable del daño D evolucionará (lineal o exponencial). Abaqus se asegurará que el área bajo la curva seleccionada coincide con la energía de fractura introducida por el usuario.

1. Evolución lineal

La evolución de la variable de daño D queda descrita en este caso por:

$$D = \frac{\delta_m^f (\delta_m^{\max} - \delta_m^0)}{\delta_m^{\max} (\delta_m^f - \delta_m^0)}$$

4.46

donde $\delta_m^f = 2G^c / T_{eff}^0$. G^c es la energía de fractura crítica en modo mixto y T_{eff}^0 representa la tracción efectiva cuando se inicia el daño.

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = ENERGY, SOFTENING = LINEAR
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs

Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Softening: Linear → Rellenar tabla

2. Evolución exponencial

En este caso la evolución de la variable de daño D viene dada por:

$$D = \int_{\delta_m^0}^{\delta_m^f} \frac{T_{eff}}{G^c - G_0} d\delta$$

4.47

donde T_{eff} y δ son la tracción efectiva y el desplazamiento respectivamente, G_0 es la energía elástica al inicio del daño. La integral se calcula entre los desplazamientos del frente de la fisura que van desde el inicio del daño (δ_m^0) hasta el final de este (δ_m^f).

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = ENERGY, SOFTENING = EXPONENTIAL
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Softening: Exponential → Rellenar tabla

En cuanto al comportamiento en modo mixto Abaqus nos permite elegir entre cuatro alternativas: optar por un comportamiento independiente del modo de fractura, introducirlo mediante una tabla de valores, utilizar la formulación analítica de Ley de Potencias o la de Benzeggagh-Kenane.

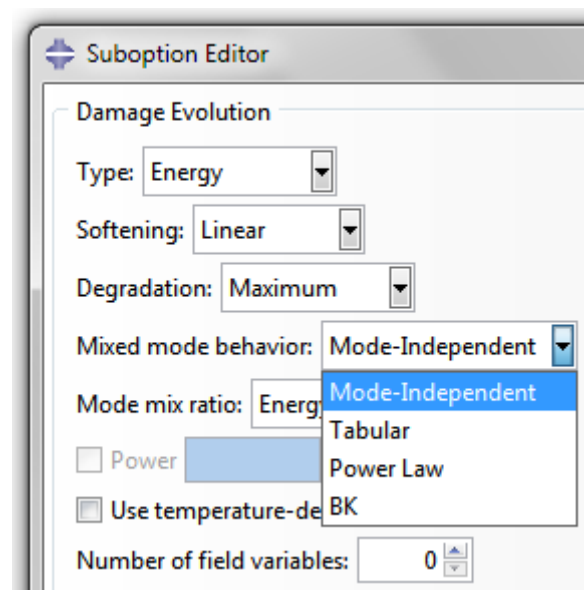


Figura 4.36: Tipos de comportamiento en modo mixto basado en energías

1. Independiente del modo

Es la opción que aparece por defecto y permite establecer un comportamiento sin tener en cuenta el modo de fractura.

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = ENERGY, MIXED MODE BEHAVIOUR = MODE-INDEPENDENT
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Mixed Mode Behaviour: Mode Independent → Rellenar tabla

2. Tabular

Una primera alternativa de establecer esta dependencia es introduciendo los valores de la energía de fractura en función del índice de modo mixto (ver página 104). La implementación se realiza de modo similar al caso basado en desplazamientos.

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = ENERGY, MIXED MODE BEHAVIOUR = TABULAR
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Mixed mode behaviour: Tabular → Rellenar tabla

3. Ley de Potencias (Power Law)

El criterio de fractura de la Ley de Potencias establece que el fallo bajo condiciones mixtas está determinado por la interacción, mediante una ley de potencias, de las energías necesarias para causar el daño en los modos individuales (normal y dos tangenciales). La expresión implementada en Abaqus vienen dada por:

$$\left\{ \frac{G_n}{G_n^C} \right\}^\alpha + \left\{ \frac{G_s}{G_s^C} \right\}^\alpha + \left\{ \frac{G_t}{G_t^C} \right\}^\alpha = 1$$

4.48

donde G_n , G_s y G_t representan el trabajo realizado por las tensiones y los desplazamientos asociados en las direcciones normal, primera y segunda tangenciales respectivamente. Con ello $G^C = G_n^C + G_s^C + G_t^C$ es la energía de fractura en modo mixto cuando se cumple la condición descrita arriba. Abaqus solicita introducir los valores G_n^C , G_s^C y G_t^C que representan las energías críticas que causan el fallo en las direcciones normal, primera y segunda tangenciales respectivamente (ver Figura 4.37).

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = ENERGY, MIXED MODE BEHAVIOUR = POWER LAW

- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Mixed mode behaviour: Power Law → Rellenar tabla

	Normal Mode Fracture Energy	Shear Mode Fracture Energy First Direction	Shear Mode Fracture Energy Second Direction
1			

Figura 4.37: Parámetros requeridos para caracterizar el comportamiento en modo mixto según la Ley de Potencias

Por último α es un parámetro del material que también es necesario introducir. Reeder (74), en su obra, ofrece valores para este parámetro para distintos materiales.

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = ENERGY, MIXED MODE BEHAVIOUR = POWER LAW, POWER = α
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Mixed mode behaviour: Power Law → Activar Power: introducir α

Figura 4.38: Introducir el exponente de la Ley de Potencias

4. Ley de Benzeggagh-Kenane

Desarrollado por Benzeggagh y Kenane (75), este modelo es especialmente útil cuando las energías de fractura en ambas direcciones tangenciales coinciden, es decir, $G_s^C = G_t^C$. Este modelo viene representado por:

$$G_n^C + (G_s^C - G_n^C) \left\{ \frac{G_s}{G_T} \right\}^\eta = G^C$$

4.49

donde $G_S = G_s + G_t$, $G_T = G_n + G_s$ y η es un parámetro del que se ofrecen valores en la obra de Reeder (74) y que depende del material. En este caso el usuario

introduce en Abaqus $G_s^C = G_t^C$, G_n^C y η de la misma forma que en el caso anterior.

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = ENERGY, MIXED MODE BEHAVIOUR = BK
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Mixed mode behaviour: BK → rellenar tabla
- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, TYPE = ENERGY, MIXED MODE BEHAVIOUR = BK, POWER = η
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Type: Energy: Mixed mode behaviour: BK → Activar Power: introducir η

3. Modo Combinado o Mixto

El crecimiento o evolución de una fisura no tiene por qué darse siguiendo de forma estricta alguno de los tres modos puros que se presentan en la Figura 2.2. La fisura puede estar sometida a un estado tensional o de deformaciones tal que provoque una superposición de estos tres estados. Para establecer las proporciones relativas entre las tracciones y deformaciones asociadas a cada uno de los modos puros de fractura se definen los índices de modo mixto.

Abaqus implementa dos formas diferentes para la medida de estos índices: la primera basada en energías y la segunda basada en tracciones. Ambas alternativas pueden utilizarse en el caso de seleccionar un comportamiento de modo mixto tabular, pero cuando se utiliza cualquiera de las formulaciones analíticas (Ley de Potencias o Benzeggagh-Kenane) para caracterizar el comportamiento en modo mixto, Abaqus asume que los índices de modo mixto se basan en energías. Para el desarrollo de ambas alternativas se asumirá que se ha seleccionado un tipo de evolución de daño energético pudiéndose realizar un desarrollo equivalente en caso de que la elección sea de desplazamientos.

1. Índice de modo mixto basado en energías

Si denotamos mediante G_n , G_s y G_t al trabajo realizado por las tracciones y sus desplazamientos asociados en la dirección normal y las dos tangenciales respectivamente, y definiendo $G_T = G_n + G_s + G_t$ el modo mixto queda definido por:

$$m_1 = \frac{G_n}{G_T}$$

4.50

$$m_2 = \frac{G_s}{G_T}$$

4.51

$$m_3 = \frac{G_t}{G_T}$$

4.52

En el caso más general de un estado de deformación tridimensional con un comportamiento anisótropo del material en las dos direcciones tangenciales, la energía de fractura G^c debe definirse en función de $(m_2 + m_3)$ y de $[m_3/(m_2 + m_3)]$. El primer término, $(m_2 + m_3) = G_s/G_T$, representa la fracción de deformación tangencial total respecto a la deformación total mientras que el segundo, $[m_3/(m_2 + m_3)] = G_t/G_s$, representa la fracción de deformación tangencial en la dirección 2 frente a la deformación tangencial total.

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, MODE MIX RATIO = ENERGY
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Mode mix ratio: Energy

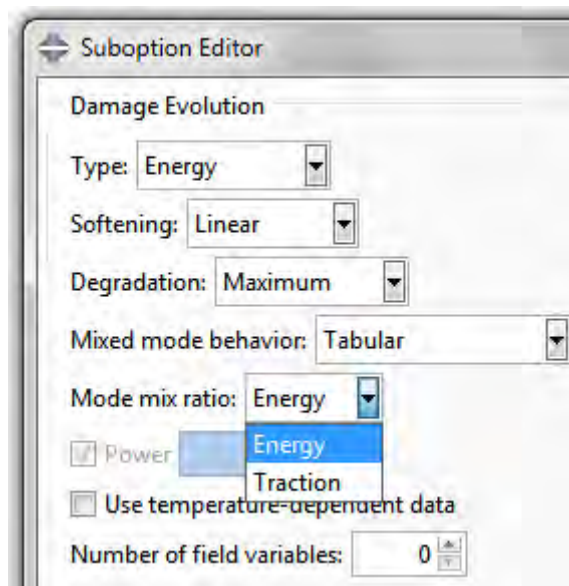


Figura 4.39: Definición del índice de modo mixto en términos de energía o de tracciones

2. Índice de modo mixto basado en tracciones

Las definiciones equivalentes para el caso del modo mixto basado en tracciones son:

$$\phi_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right) \tan^{-1} \left(\frac{\tau}{t_n}\right)$$

4.53

$$\phi_2 = \left(\frac{2}{\pi}\right) \tan^{-1} \left(\frac{t_t}{t_s}\right)$$

4.54

donde $\tau = \sqrt{t_t^2 + t_s^2}$ representa la tracción tangencial efectiva.

- Input file (*.inp): *DAMAGE EVOLUTION, MODE MIX RATIO = TRACTION
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage evolution: Mode mix ratio: Traction

Es necesario tener en cuenta que en el caso de utilizar alguna de las formulaciones analíticas para describir el comportamiento en modo mixto de fractura, el índice de modo mixto se asume definido en términos energéticos. En el caso de seleccionar un comportamiento tabular ambas opciones están disponibles.

En ocasiones la convergencia de las ecuaciones no es inmediata. Introduciendo un componente amortiguador en ellas mediante la regularización viscosa, se puede ayudar a resolver estos problemas de convergencia. En general, valores pequeños permiten superar ciertos problemas de convergencia sin afectar en gran medida a los resultados.

- Input file (*.inp): *DAMAGE STABILIZATION
- Abaqus/CAE: Property module: Material editor: Mechanical → Damage for Traction Separation Laws → Quade Damage, Quads Damage, Maxs Damage or Maxe Damage → Suboptions → Damage stabilization cohesive

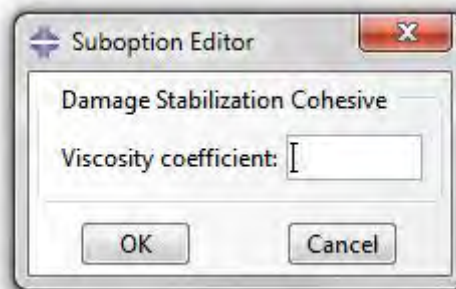


Figura 4.40: Coeficiente viscoso para facilitar la convergencia de las ecuaciones

4.3.3.2 XFEM basado en la MFEL

Se presenta como una alternativa a la utilización de los modelos de zona cohesiva a la hora de estudiar el comportamiento de las fisuras. El uso de las consideraciones de la MFEL lo hace más adecuado para los casos de fractura frágil. La utilización de la MFELL tiene también otra consecuencia. Si bien este método puede utilizarse para estudiar el desarrollo de grietas desde su creación a través de un camino arbi-

trario, la MFEL, por definición, necesita de la existencia de un defecto en el modelo con lo que las consideraciones derivadas de esta teoría solo se aplicarán tras la nucleación de la fisura.

4.3.3.2.1 Inicio del daño

En el caso de no encontrar una grieta preexistente en el elemento a estudio, la nucleación de la fisura se rige por uno de los seis criterios que fueron utilizados para el caso de los modelos cohesivos y su implementación en Abaqus se realiza de forma idéntica (ver apartado 4.3.3.1.2).

4.3.3.2.2 Evolución del daño

En esta segunda alternativa el daño se introduce como parte de las propiedades del contacto en la grieta. Desde la ventana *Edit Crack* que se muestra en la Figura 4.15 se puede acceder a la creación de estas propiedades de interacción mediante el botón situado en la esquina inferior derecha. No obstante para editar o modificar posteriormente estas propiedades se deberá utilizar el *Interaction Property Manager*.

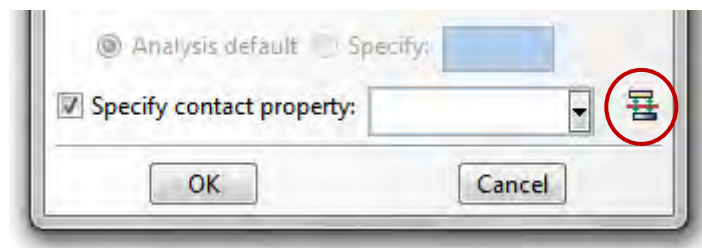


Figura 4.41: Detalle ventana *Edit Crack*. *Creation Property Interaction*

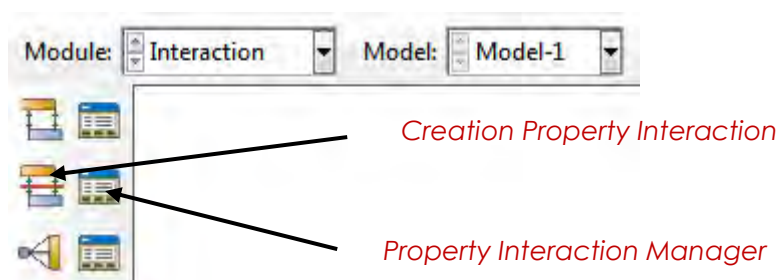


Figura 4.42: Detalle del Módulo *Interaction*. *Creation Property Interaction* y *Property Interaction Manager*

Una vez se ha iniciado el daño, el crecimiento de la fisura se producirá si se cumple que la variable que controla el criterio de fractura alcanza el valor 1 con una tolerancia determinada f_{tol} .

$$1 \leq f \leq 1 + f_{tol}$$

4.55

Si $f > 1 + f_{tol}$ el incremento de tiempo en el *step* se reduce hasta que se satisfaga el criterio. Este requisito provoca en ocasiones problemas de convergencia ya que el procesador aborta el estudio cuando realiza varios intentos en un mismo incremento. El valor por defecto es 0.2 pero puede modificarse para intentar superar estos problemas (ver *Tolerance* en la Figura 4.44).

- Input file (*.inp): *SURFACE BEHAVIOUR
*FRACTURE CRITERION, TOLERANCE = f_{tol} , TYPE = VCCT
- Abaqus/CAE: Interaction module: Create Interaction Property → Contact → Mechanical → Fracture Criterion → Tolerance: f_{tol}

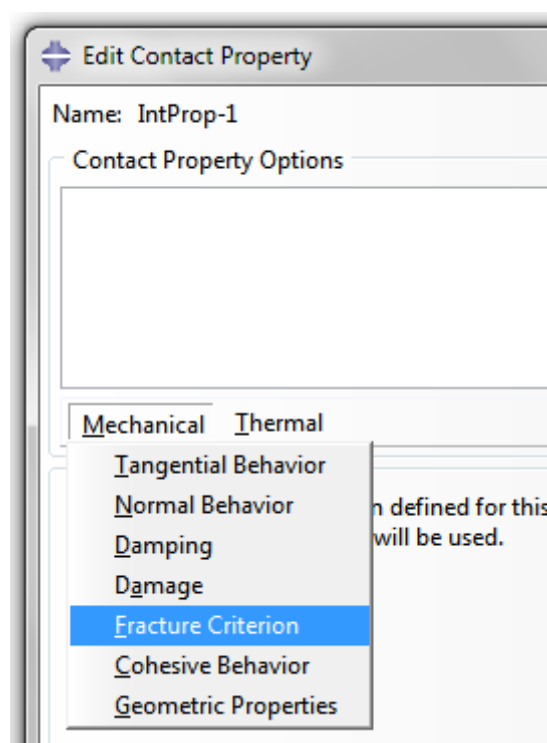


Figura 4.43: Detalle ventana Edit Contact Property. Seleccionar criterio de fractura

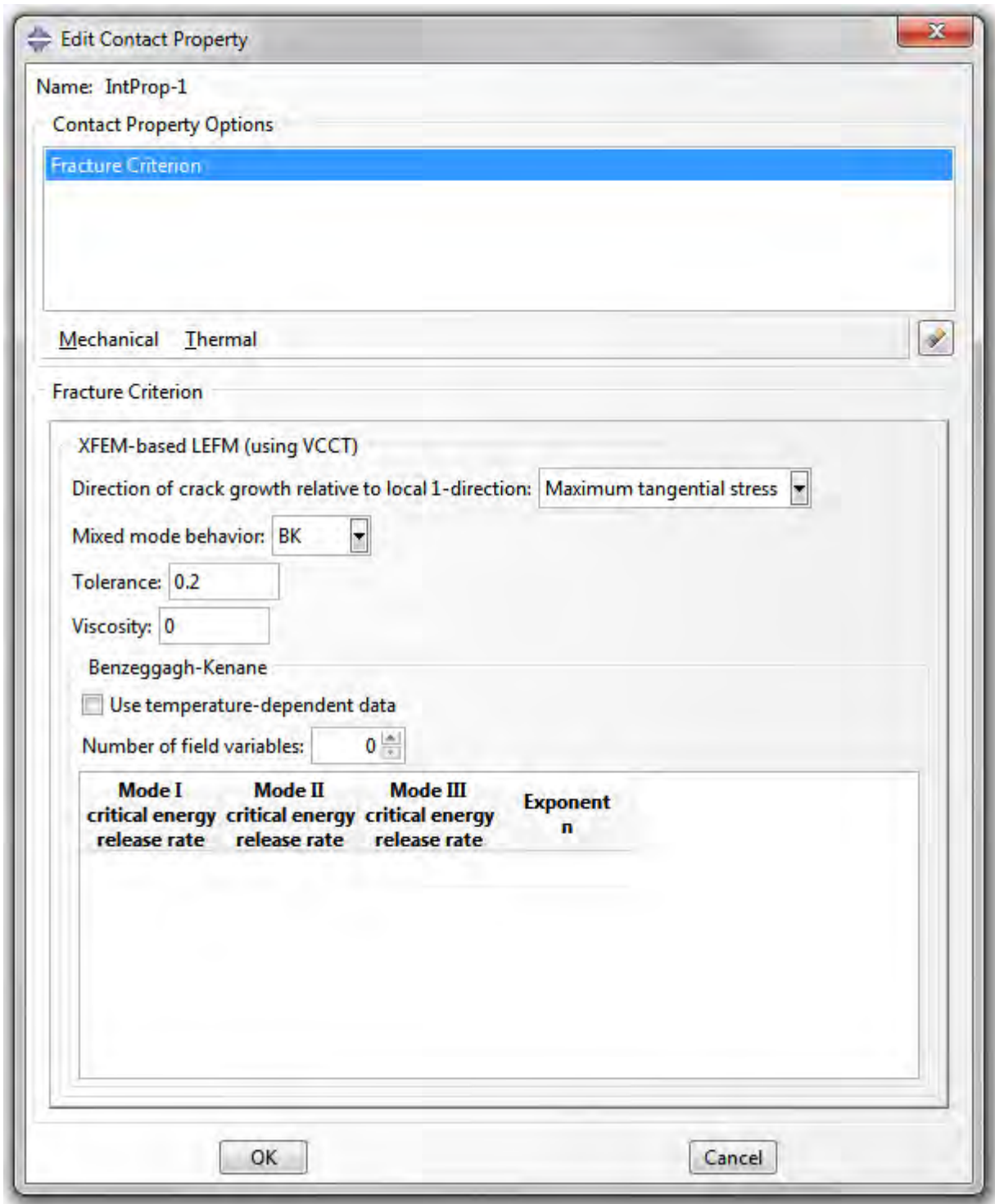


Figura 4.44: Parámetros para caracterizar el criterio de fractura mediante XFEM basado en la MFEL y utilizando la VCCT

También es necesario establecer la dirección en que se propagará la fisura cuando se satisface el criterio de fractura. Se puede elegir la dirección ortogonal a la dirección 1 del elemento, ortogonal a la dirección 2 del mismo o que la grieta se propague de forma normal a la dirección de máxima tensión tangencial, opción activa por defecto.

- Input file (*.inp): *FRACTURE CRITERION, NORMAL DIRECTION = MTS
*FRACTURE CRITERION, NORMAL DIRECTION = 1
*FRACTURE CRITERION, NORMAL DIRECTION = 2
- Abaqus/CAE: Interaction module: Create Interaction Property → Contact → Mechanical → Fracture Criterion → Direction of crack growth relative to local 1-direction: maximum Tangential Stress, Normal or Parallel

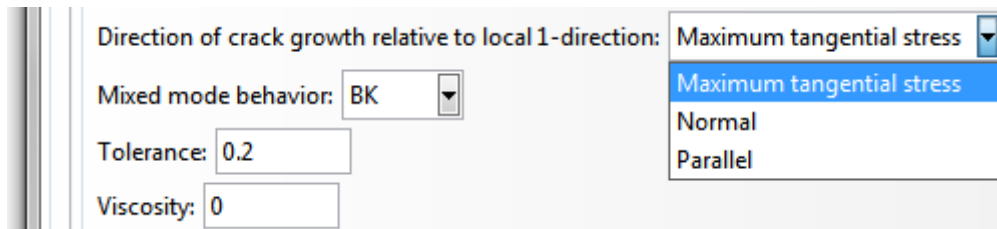


Figura 4.45: Seleccionar dirección del crecimiento de la grieta

En cuanto al modo mixto, Abaqus utiliza la VCCT (*Virtual Crack Closure Technique*) para calcular la tasa de liberación de energía de fractura, y permite seleccionar entre tres alternativas diferentes: la ley de Benzeggagh-Kenane, la Ley de Potencias y la de Reeder.

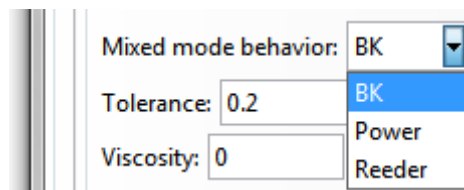


Figura 4.46: Seleccionar comportamiento en modo mixto de fractura

1. Ley de Benzeggagh-Kenane

La formulación viene dada por:

$$G_{eq}^c = G_{IC} + (G_{IIC} - G_{IC}) \left(\frac{G_{II} + G_{III}}{G_I + G_{II} + G_{III}} \right)^\eta$$

4.56

donde G_{IC} y G_{IIC} representan las tasas críticas de liberación de energía de fractura y η es un parámetro del material y serán los parámetros a introducir en Abaqus. La obra de Reeder (74) ofrece información acerca del valor que toma este parámetro según distintos tipos de materiales.

- Input file (*.inp): *FRACTURE CRITERION, TYPE = VCCT, MIXED MODE BEHAVIOUR = BK
- Abaqus/CAE: Interaction module: Contact property editor → Mechanical → Fracture Criterion → Mixed Mode Behaviour: BK e introducir las tasas críticas de liberación de energía en la tabla.

Benzeggagh-Kenane

☐ Use temperature-dependent data

Number of field variables:

Mode I critical energy release rate	Mode II critical energy release rate	Mode III critical energy release rate	Exponent n

Figura 4.47: Parámetros requeridos para caracterizar el comportamiento en modo mixto según la Ley de Benzeggagh-Kenane

2. Ley de Potencias

Esta ley fue enunciada por Wu y Reuter en 1965 y sigue la siguiente fórmula:

$$\frac{G_{eq}}{G_{eq}^c} = \left(\frac{G_I}{G_{IC}} \right)^{a_m} + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}} \right)^{a_n} + \left(\frac{G_{III}}{G_{IIIC}} \right)^{a_0}$$

4.57

Para implementar este modelo es necesario introducir los valores de G_{IC} , G_{IIC} , G_{IIIC} , a_m , a_n y a_0 .

- Input file (*.inp): *FRACTURE CRITERION, TYPE = VCCT, MIXED MODE BEHAVIOUR = POWER
- Abaqus/CAE: Interaction module: Contact property editor → Mechanical → Fracture Criterion → Mixed Mode Behaviour: Power e introducir las tasas críticas de liberación de energía y los exponentes en la tabla.

Power

☐ Use temperature-dependent data

Number of field variables:

Mode I critical energy release rate	Mode II critical energy release rate	Mode III critical energy release rate	Exponent am	Exponent an	Exponent ao

Figura 4.48: Parámetros requeridos para caracterizar el comportamiento en modo mixto según la Ley de Potencias

3. Ley de Reeder

Este modelo se encuentra descrito en Reeder et al. (74) usando la siguiente expresión:

$$G_{eq}^C = G_{IC} + (G_{IIC} - G_{IC}) \left(\frac{G_{II} + G_{III}}{G_I + G_{II} + G_{III}} \right)^\eta + (G_{IIIC} - G_{IIC}) \left(\frac{G_{III}}{G_{II} + G_{III}} \right) \left(\frac{G_{II} + G_{III}}{G_I + G_{II} + G_{III}} \right)^\eta$$

4.58

Solo se puede aplicar en problemas tridimensionales y cuando $G_{IIIC} \neq G_{IIC}$ ya que si se cumple esta igualdad el modelo se resume en la ley de Benzeggagh-Kenane. Para implementarla es necesario introducir los valores de G_{IC} , G_{IIC} , G_{IIIC} y η .

- Input file (*.inp): *FRACTURE CRITERION, TYPE = VCCT, MIXED MODE BEHAVIOUR = REEDER
- Abaqus/CAE: Interaction module: Contact property editor → Mechanical → Fracture Criterion → Mixed Mode Behaviour: Reeder e introducir las tasas críticas de liberación de energía y los exponentes en la tabla.

Mode I critical energy release rate	Mode II critical energy release rate	Mode III critical energy release rate	Exponent n

Figura 4.49: Parámetros requeridos para caracterizar el comportamiento en modo mixto según la Ley de Reeder

En ocasiones resulta complicado alcanzar la convergencia de los problemas. La técnica de la regularización viscosa puede resultar útil en estos casos ya que permite amortiguar el comportamiento no convergente de las ecuaciones (ver Viscosity en la Figura 4.44).

- Input file (*.inp): *FRACTURE CRITERION, TYPE = VCCT, VISCOSITY = μ
- Abaqus/CAE: Interaction module: Contact property editor → Mechanical → Fracture Criterion → Viscosity: μ

4.3.4 Visualización de los resultados

Para visualizar el inicio y el desarrollo de la fisura es necesario que en la definición de las variables de salida en el módulo *step*, se seleccionen las variables PHILSM y STATUSXFEM.

La variable PHILSM se utiliza para visualizar el desarrollo de la fisura desde su nucleación. Utilizando las opciones de animación se puede visualizar de forma diná-

mica este proceso. Además se pueden utilizar secciones activas o modificar la transparencia del modelo para seguir el desarrollo de la fisura en el interior del modelo.

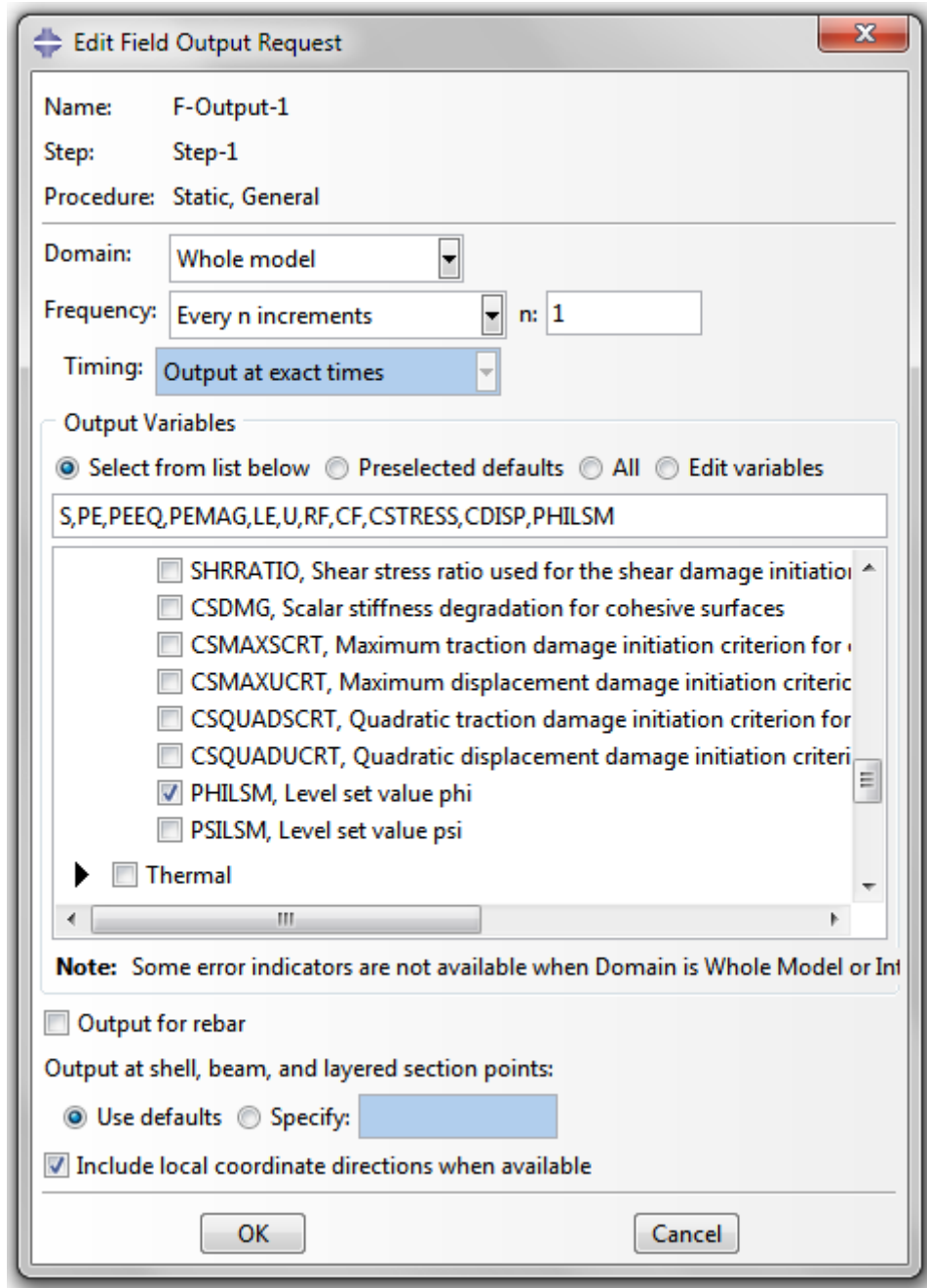


Figura 4.50: Seleccionar PHILSM en la ventana *Edit Field Output Request*

La segunda, STATUSXFEM, permite identificar el estado de los elementos enriquecidos. La variable asigna un valor entre 0 y 1 a cada elemento. Se le asigna un valor 0 cuando el elemento está intacto y un valor 1 cuando está totalmente degradado. Cualquier otro valor indica que el elemento se encuentra parcialmente dañado.

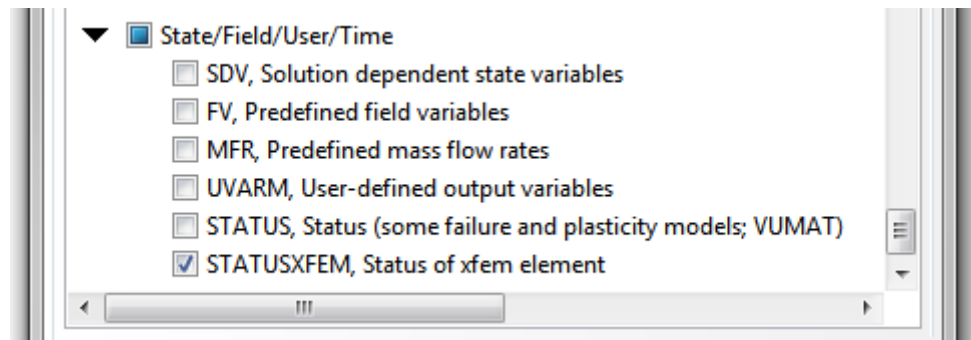


Figura 4.51: Detalle *Edit Field Output Request*. Seleccionar STATUSXFEM

5

Desarrollo de la aplicación

5.1 Introducción

Como se comentó en los objetivos del Trabajo, el desarrollo de la aplicación viene motivado por una búsqueda de ahorro de tiempo en la generación de modelos, así como evitar tareas repetitivas. Con ella se permite no solo la parametrización del eje (idea inicial) sino también hacer lo propio con las numerosas propiedades necesarias para poder definir el comportamiento del material en todas las etapas de daño; las características de las cargas o el procedimiento de mallado entre otros.

Este tiempo podrá dedicarse a tareas alternativas que permitan llevar a cabo un análisis crítico de los resultados con el objetivo de refinar el modelo y conseguir resultados cada vez más exactos. A continuación se expone el proceso de desarrollo de la aplicación así como su funcionamiento.

5.2 Desarrollo de la aplicación

La aplicación se encuentra dividida en una serie de pasos que el usuario deberá recorrer y que le llevarán desde la definición de las dimensiones del eje hasta la visualización de los resultados. Algunos de estos pasos están jerarquizados y deben ser realizados de forma secuencial ya que los pasos posteriores demandan *inputs* que son introducidos por teclado o de forma automática en los anteriores. Se avisará al usuario mediante el Message area en el caso de incumplir este orden preestablecido.

La pantalla principal de la aplicación se muestra en la Figura 5.1. Toda la funcionalidad de la aplicación se encuentra contenida en el módulo XFEM creado a medida. A pesar de ello se han mantenido los tradicionales módulos de Abaqus ya que pueden resultar de utilidad en algunas ocasiones como por ejemplo controlar el progreso del caso de estudio durante su ejecución, o modificar parámetros internos de Abaqus para facilitar la convergencia del caso a estudio. De vuelta al módulo XFEM, los botones de la parte izquierda permiten acceder a los distintos pasos, los cuales serán descritos en detalle más adelante. Además, en aras de la simplicidad, y a modo de ayuda, se incluyen comentarios

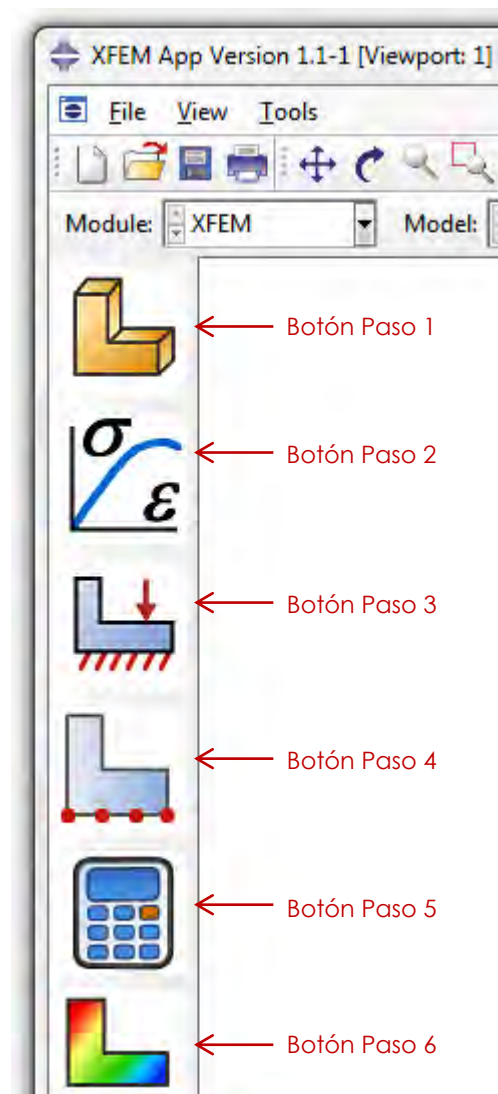


Figura 5.1 Detalle de la pantalla principal de la aplicación: Módulo XFEM

auto-explicativos los cuales se hacen visibles si se mantiene el puntero sobre los componentes.

A continuación se explicarán los distintos pasos de la aplicación.

5.2.1 Paso 1

Se comienza definiendo la geometría del modelo. En primer lugar se solicita al usuario introducir por teclado las dimensiones del eje. Las dimensiones por defecto son 900 mm de longitud y 20 mm de diámetro. Por otro lado se introducen los parámetros que determinan las dimensiones de la fisura: las relaciones a/D y a/b que fueron presentadas en el apartado 3.5.1. Los valores por defecto para ambos parámetros son 0.5 y 0 lo que representa una fisura de frente recto que abarca la mitad de la sección del eje. Se presenta, a modo de ayuda, un esquema representativo de la sección fisurada.

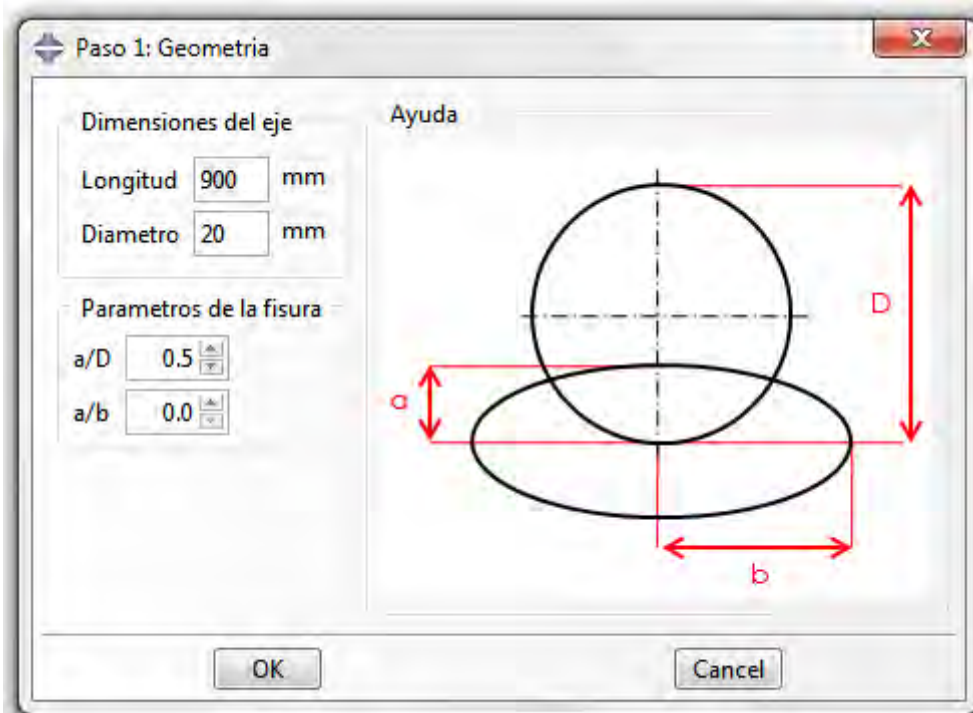


Figura 5.2 Paso 1 de la aplicación: definir geometría del eje y de la fisura

Internamente, tras cerrar el cuadro de diálogo con el botón OK, se crea tanto el eje como la fisura como *parts* independientes. Además de cara al posterior mallado, se realizan particiones en el eje. Una serie de planos transversales dividen el eje en tramos. La sección transversal se divide, en primer lugar, en dos siguiendo el eje vertical de simetría. Tras ello se divide nuevamente siguiendo esta vez el perfil de la fisura introducida (frente recto, semi-elíptico o semi-circular). Ver Figura 5.3 y Figura 5.4.

En cuanto a la fisura propiamente dicha se modela tipo *shell*. Todas ellas parten de un cuadrado. En el caso de frente recto, esta forma no será modificada. En los

otros dos casos se sustituirá el borde superior del cuadrado por una semi-elipse (siendo el semicírculo un caso particular de esta) con las dimensiones introducidas por el usuario en el *Dialog box*.

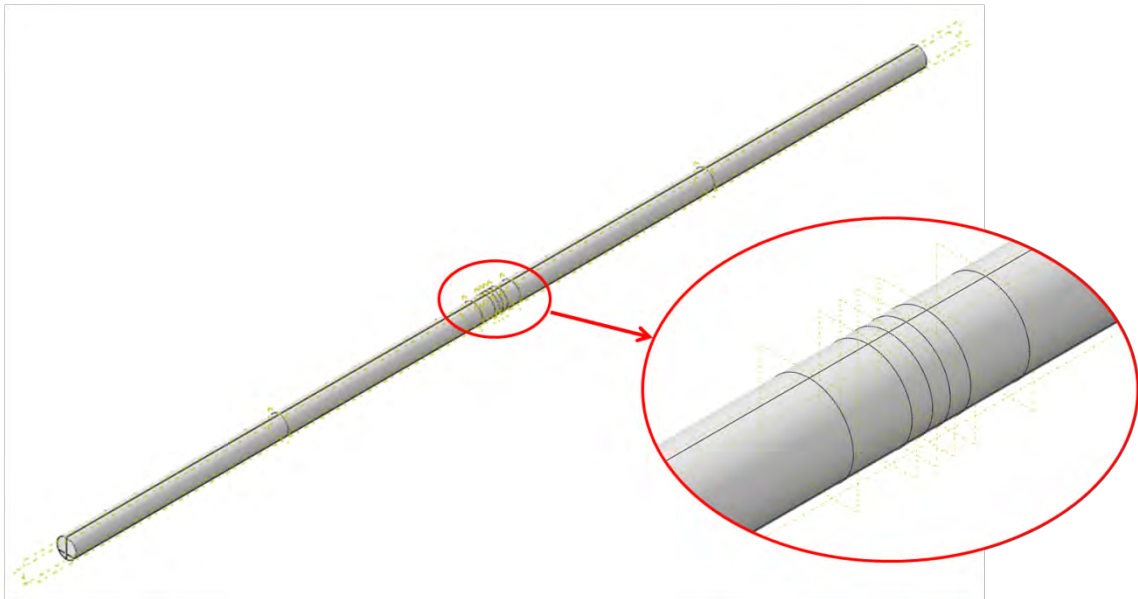


Figura 5.3 Particiones longitudinales en el eje

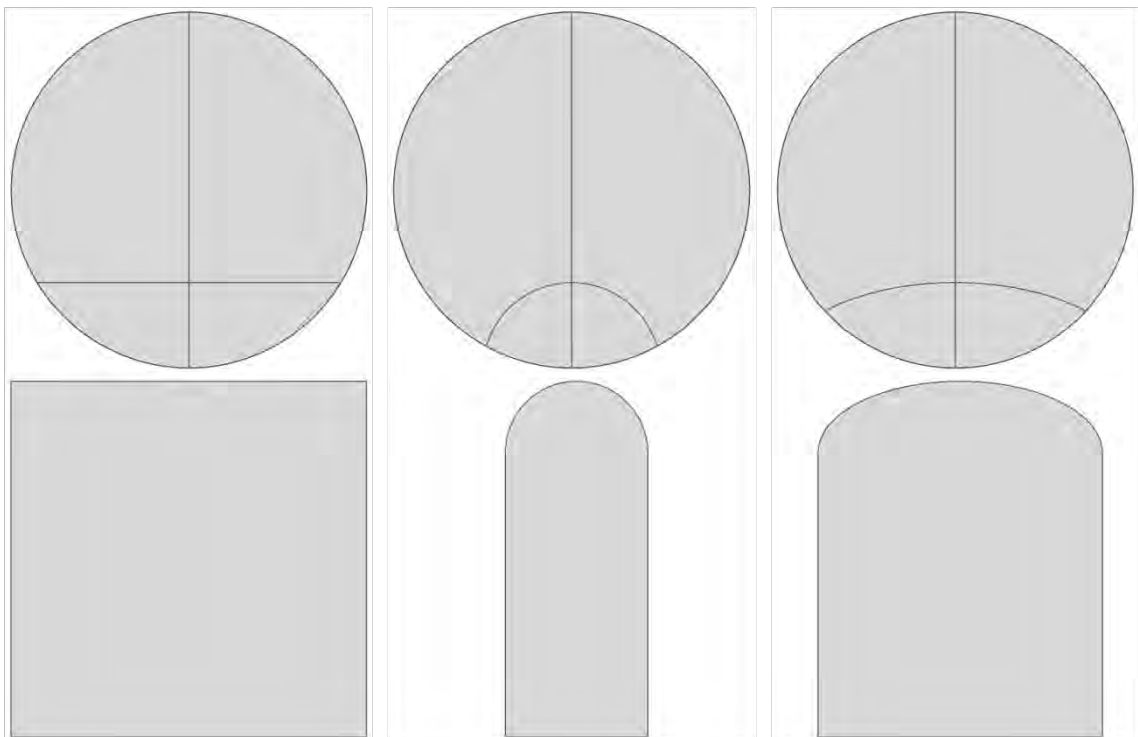


Figura 5.4 Particiones transversales en el eje (arriba) y fisuras (abajo). De izquierda a derecha: fisura de frente recto ($a/D = 0.25$, $a/b = 0$), semicircular ($a/D = 0.25$, $a/b = 1$) y semi-elíptico ($a/D = 0.25$, $a/b = 0.5$)

5.2.2 Paso 2

Una vez definido geométicamente el modelo se selecciona el material. Para agilizar el proceso y evitar tareas repetitivas se ofrece la posibilidad de utilizar materiales predefinidos como el acero o el aluminio. No obstante también se permite crear un nuevo material introduciendo sus propiedades. Estas serán por un lado la densidad y las propiedades elásticas para caracterizar el comportamiento previo al daño. Posteriormente se introducirá el valor de tensión que marca el inicio del daño -recordar que se utiliza el criterio MAXPS- y por último los parámetros que caracterizan la evolución del mismo según el modelo de Benzegagh-Kenane. Como se ofrece la posibilidad de utilizar los CZM o la MFEL -como se explicó en el apartado 4.3- los valores requeridos dependerán de la opción seleccionada.

The image shows a software dialog box titled "Paso 2: Material". It contains several sections for configuring material properties and damage models. Red boxes and arrows highlight specific elements:

- Material Selection:** A dropdown menu is set to "Nuevo". A red box highlights this menu, with an arrow pointing to a separate list containing "Acero", "Aluminio", and "Nuevo".
- Calculation Alternatives:** Two radio buttons are present: "CZM y TSL" (selected) and "MFEL y VCCT". A red box highlights both, with an arrow pointing to a second box where "MFEL y VCCT" is now selected.
- Material Properties:** Fields for "Nombre" (Material nuevo), "Densidad", "Modulo Elastico", and "Coeficiente de Poisson" are shown, all with a value of 0.
- Damage Initiation:** Fields for "Maxima Tension Principal" and "Tolerancia" are shown, both with a value of 0.
- Damage Evolution:** A section titled "Ley de Benzeggagh-Kenane" contains four input fields: "Energia de Fractura Modo I", "Energia de Fractura Modo II", "Energia de Fractura Modo III", and "Exponente", all set to 0. A red box highlights this section, with an arrow pointing to a second box showing the same fields but with the labels "Tasa Liberacion de Energia" instead of "Energia".
- Stabilization:** A field for "Viscosidad" is shown with a value of 0.
- Buttons:** "OK" and "Cancel" buttons are at the bottom.
- Note:** "Nota: Utilizar unidades del S.I. (Nms)" is displayed at the bottom.

Figura 5.5 Paso 2 de la aplicación: selección del material y del modelo de daño

Internamente la aplicación crea la sección con el material seleccionado y la asigna al eje. Notar que a la fisura ni se le asigna un material ni posteriormente formará parte de la malla. Se crea el *assembly* entre el eje y la fisura colocando esta última en su lugar correspondiente. Por último se crea el *step* en el que se aplicarán las cargas.

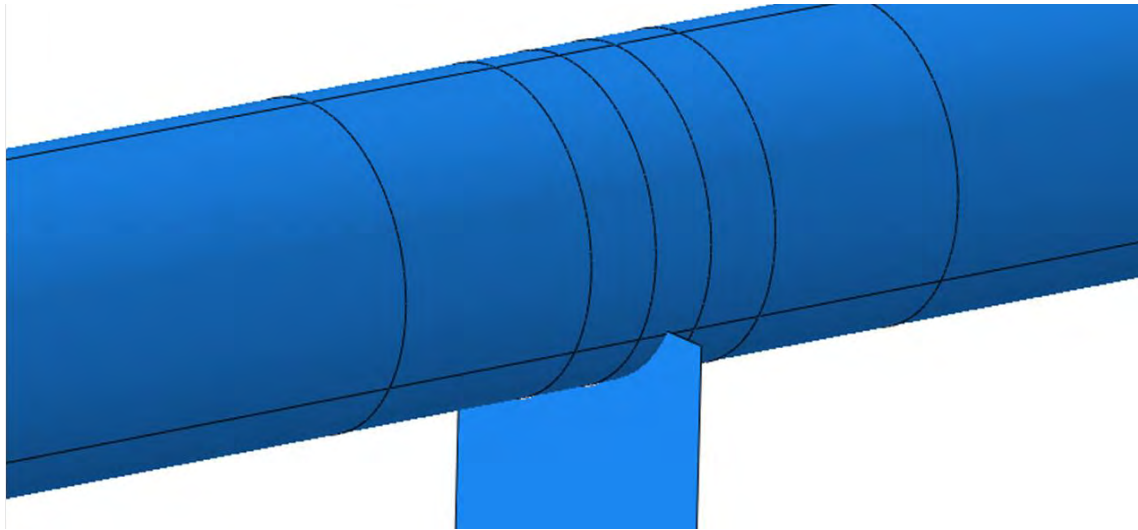


Figura 5.6 Assembly entre el eje y la fisura en su posición definitiva

5.2.3 Paso 3

En este tercer paso se definen las cargas. Los parámetros requeridos son la amplitud máxima de la fuerza, el valor medio -si se quiere tener una tensión media en todo el eje- y la velocidad de giro del mismo. Se muestran también las unidades en las que se debe introducir cada parámetro. También aparecen en un cuadro de diálogo emergente si se mantiene el puntero sobre cierto parámetro.

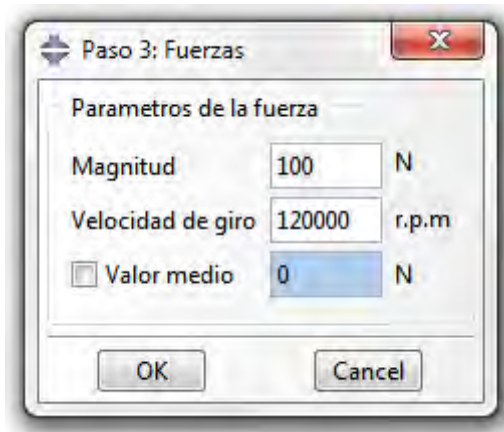


Figura 5.7 Paso 3 de la aplicación: características de las fuerzas

Para aproximar el comportamiento al de un eje rotativo se utilizan dos cargas sinusoidales (una en el eje *X* y otra en el *Y*) de modo que la combinación de ambas genere el giro alrededor del eje longitudinal *Z*. Para evitar esfuerzos de torsión que alteren los resultados, esta carga se aplica en el centro de la sección. En cuanto a los

apoyos se restringe el desplazamiento del borde de ambas caras del eje para simular la presencia de rodamientos (ver Figura 5.8).

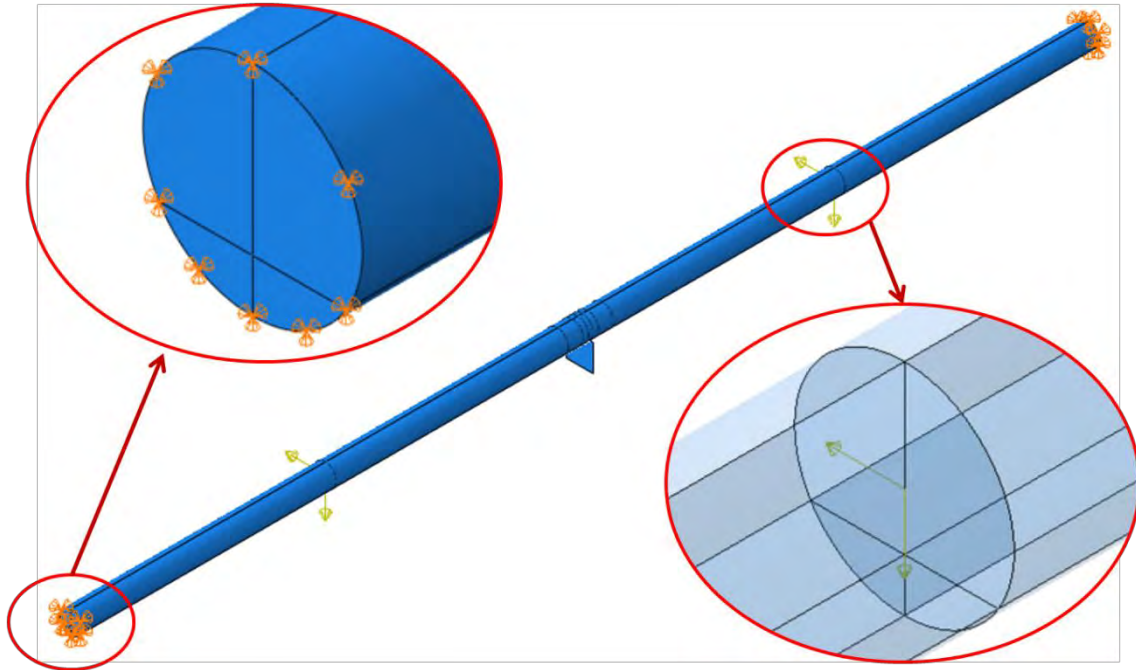


Figura 5.8 Esquema de fuerzas y coacciones en el eje. Detalles de los apoyos y el punto de aplicación de la carga.

5.2.4 Paso 4

Uno de los puntos críticos en cualquier estudio mediante elementos finitos es el mallado del modelo, ya que condicionará tanto el tiempo de cálculo como la fidelidad de los resultados. Para conseguir un mallado lo más optimizado posible se utiliza un tamaño de elemento más pequeño en aquella zona por la que se propagará la fisura, es decir, por encima del frente de grieta. En cambio por debajo de esta se opta por un mallado más grueso. Este es el motivo de realizar una partición con la forma de la fisura en la sección transversal del eje.

No obstante, se ofrecen dos alternativas: un mallado automático y otro manual. El automático es la opción por defecto y supone un excelente punto de partida. No obstante para dar mayor libertad al usuario, la opción manual permite agilizar el proceso de modificación del mallado, ahorrando tiempo al usuario ya que no es necesario seleccionar uno a uno los distintos bordes a sembrar. Solo debe centrarse en modificar el número de elementos en los tramos longitudinales o el tamaño de los elementos en los tramos de la sección transversal.

A diferencia de los pasos anteriores, se incluye también el botón *Apply*. La diferencia con el botón *OK* es que no cierra el *Dialog Box* al modificar el mallado lo que permite modificar el mallado tantas veces como sea necesario sin tener que abrir continuamente el *Dialog Box*.

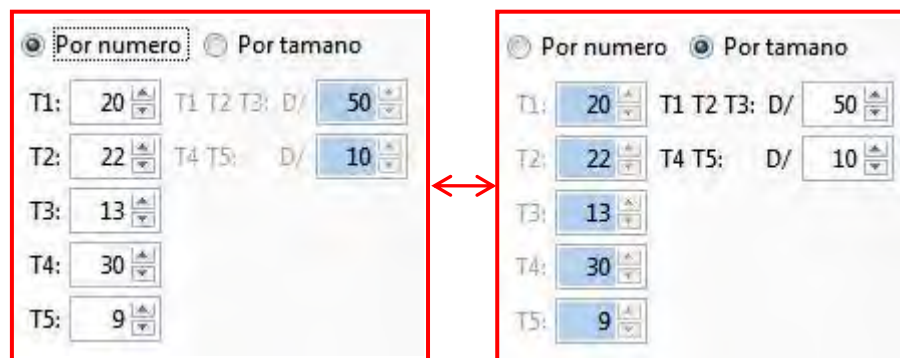
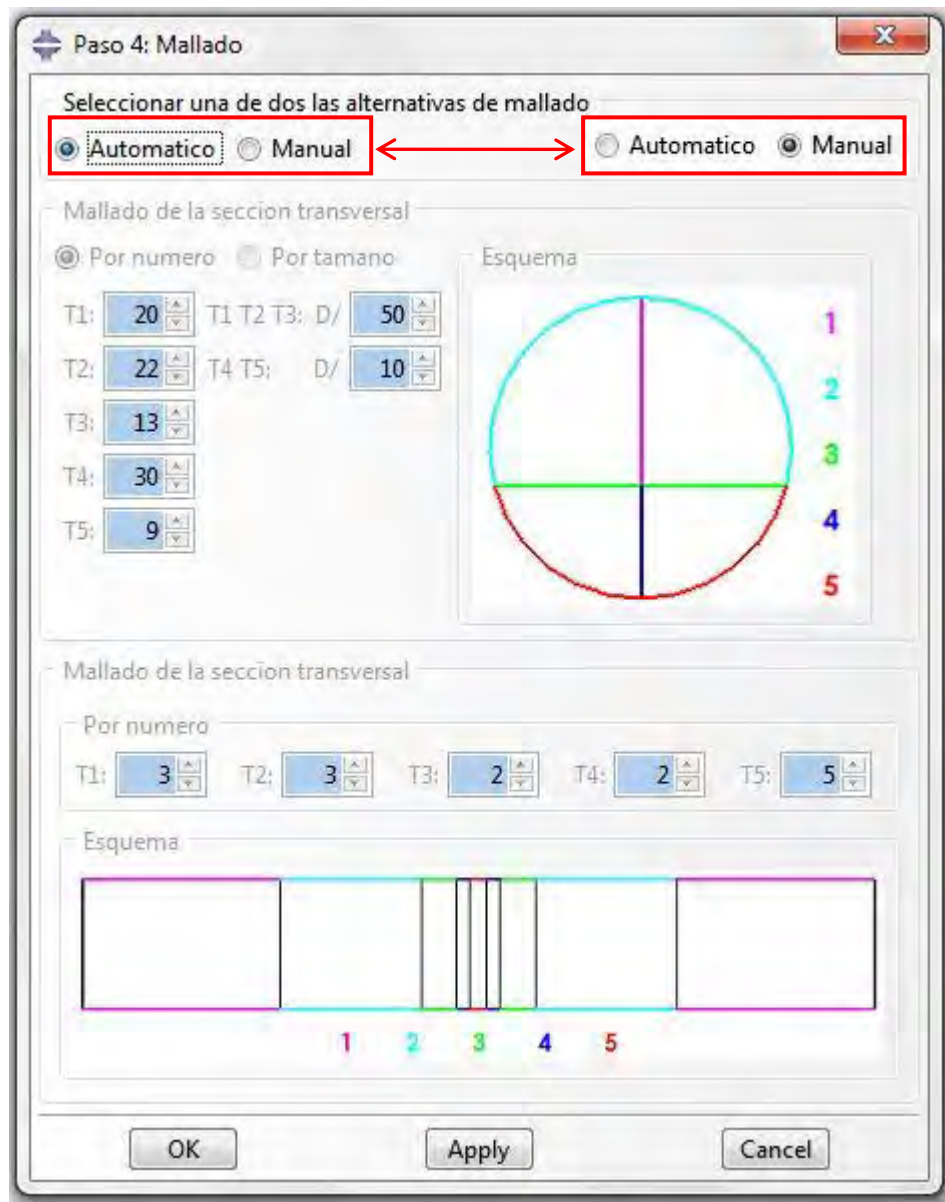


Figura 5.9 Paso 4 de la aplicación: mallado del eje segun diferentes alternativas

En los casos prácticos del capítulo 6 se utiliza el mallado automático que siempre los bordes de la región no fisurada con un tamaño aproximado de la quincuagésima parte del diámetro del eje. Al establecer un tamaño dependiente del diámetro el número de elementos por unidad de longitud en cualquier eje, sea cual sea su diámetro, será el mismo. En la zona fisurada -por debajo del frente de grieta inicial- el malla-

do es más grueso consiguiendo reducir el número de elementos totales y por tanto el tiempo de ejecución.

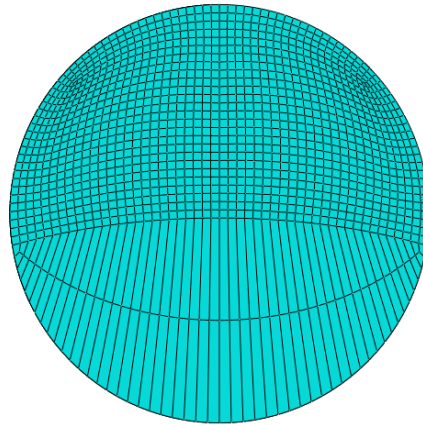


Figura 5.10 Mallado automático de la sección transversal de un eje con una fisura semi-elíptica ($a/D = 0.5$, $a/b = 0.5$)

5.2.5 Paso 5

Tras el mallado se crea el *job*. Internamente se genera el *input file* que es enviado al *kernel* para su resolución. Además, ya que los ficheros de resultados que se obtienen son muy grandes, se ofrece la posibilidad de visualizar los resultados para todo el eje o únicamente para la partición central donde se encuentra alojada la fisura. De esta forma, aunque el cálculo se realiza para todo el eje, solo se almacenan los resultados de los nodos y elementos de esta región con lo que el tamaño de los ficheros se reduce considerablemente.

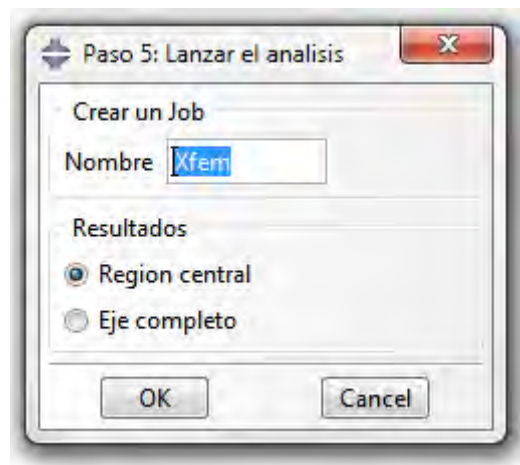


Figura 5.11 Paso 5 de la aplicación: crear y lanzar el *job*

5.2.6 Paso 6

Pulsando el botón de resultados se muestra en pantalla la evolución de la fisura según se avanza en el *step*.

5.3 Código en *Python* de la aplicación

El código responsable del funcionamiento de la aplicación se encuentra fraccionado y contenido en distintos *scripts* con diferentes funciones en ellos que permiten ir saltando de unos a otros según se requiere.

En primer lugar se encuentran los *scripts* de inicialización donde se crea la ventana principal, se añade el nuevo módulo al desplegable de módulos, se seleccionan las *toolbars* que se desean mostrar etc. Gran parte del código de estos *scripts* es común para cualquier aplicación que se desee realizar en el entorno de Abaqus.

Por otro lado se encuentran los *scripts* encargados de la gestión y funcionalidad de los *dialog boxes* que aparecen al pulsar los botones de los distintos pasos. Cada *dialog box* necesita de dos *scripts* diferentes. El primero se encarga de organizar y distribuir a gusto del programador los distintos elementos que lo componen como puede ser texto estático, imágenes, grupos, botones de selección, campos para introducir datos entre otros. El segundo gestiona los datos adquiridos y permite su relación con el resto del código. Para su identificación, a los primeros se les añade el apellido *DB* y a los segundos *Form*.

Por último se encuentra el corazón de la aplicación, el *script* principal. Se denomina *xfemKernel* en clara alusión a su función de interactuar directamente con el *kernel* de Abaqus. En él, se encuentra el código responsable de generar el modelo a medida según las elecciones y valores introducidos por el usuario. Se definen funciones que enlazan, en primer lugar, con los *scripts* anteriores (*DB* y *Form*) para la adquisición de datos, y en segundo lugar entre distintos puntos del propio *script* de tal forma que estos datos estén disponibles según se progresa en la aplicación.

6

Modelo numérico

6.1 Introducción

Para el desarrollo de este Trabajo se parte de un eje biapoyado de 900 mm de longitud y 20 mm de diámetro y sometido a dos cargas puntuales de 100 N de magnitud y situadas a un cuarto de la longitud total desde cada uno de los extremos. De esta forma se consigue un momento flector uniforme en la zona central del eje así como un esfuerzo cortante nulo. Las cargas, independientemente del tamaño de la fisura, se aplican en el punto central de las secciones. De esta forma se evita la distorsión de los resultados al introducir una excentricidad a la carga que provocaría torsiones en el eje. Estas dimensiones y condiciones de carga corresponden con las utilizadas en estudios anteriores del Área de Ingeniería Mecánica (48). A pesar de que la aplicación permite generar fisuras de frente semi-elíptico y semi-circular, en el caso de este Trabajo solo se estudiará el comportamiento de fisuras de frente recto ($a/b = 0$). En cuanto al tamaño inicial de las fisuras se emplearán valores del factor a/D de 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4.

El material del eje es aluminio con un Módulo de Young de 71.7 GPa y un coeficiente de Poisson de 0.3. En cuanto a la modelización del daño se utilizan y comparan las dos alternativas que ofrece Abaqus y que se incluyen en la aplicación: la de los modelos cohesivos CZM y la que se basa en la Mecánica de Fractura Elástico Lineal MFEL. En ambos casos se establece MAXPS como criterio de inicio del daño introduciendo un valor de 500 MPa. Trabajos como el de Xu y Yuan (76) muestran que este criterio ofrece predicciones de gran exactitud acerca de la dirección de desarrollo de las fisuras en comparación con estudios experimentales. En cuanto a la evolución del daño se usa la Ley de Benzeggagh-Kenane cuyo exponente toma el valor 1. En cuanto a los valores de las energías de fractura (en el caso de utilizar CZM) y las tasas de liberación de energía (si se usa la MFEL), es necesario señalar que, para poder observar el desarrollo de la fisura, es necesario utilizar valores poco representativos del material. No obstante para facilitar un desarrollo de la fisura aproximadamente en el plano de la sección central se establecerá unos valores al menos un orden de magnitud superior en el caso de las energías de fractura -o en su defecto tasas de liberación de energía de fractura- en los modos II y III respecto al valor otorgado al modo I.

Para poder comparar los resultados obtenidos mediante ambas aproximaciones se utiliza la misma malla de modo que las posibles diferencias obtenidas puedan achacarse a las técnicas de resolución y no al modelo.

En total se realizan 8 casos correspondientes a los cuatro tamaños de fisura comentados anteriormente y a los dos métodos de resolución MFEL y CZM. No obstante estos 8 modelos son solo los finales. Para alcanzar esos resultados, los modelos de prueba y con pequeñas variaciones ejecutados se cuentan por decenas. El tiempo de ejecución varía según los casos pero la duración media se encuentra en torno a 10-12 días. Por tanto el tiempo de cálculo total, entre casos de prueba y finales es considerable.

En los apartados siguientes se exponen los resultados obtenidos para los tamaños de fisura estudiados comparando ambas técnicas.

6.1.1 Tamaño de fisura $a/D = 0.1$

La variable interna de Abaqus que nos permite monitorizar el crecimiento de la fisura a través del eje es la denominada STATUSXFEM. Cuando el elemento está intacto su valor es 0 y evoluciona según el nivel de degradación hasta el valor 1 cuando el elemento se encuentra totalmente degradado.

También se considerará la variable S33. Esta variable hace referencia a la tensión en dirección z, que en nuestro caso representa la tensión normal a la sección del eje. En general, una tensión de normal positiva o de tracción en la zona de la fisura supondrá su apertura mientras que una tensión negativa o de compresión provocará el contacto de ambas caras de la fisura que por tanto estará cerrada. Durante el giro del eje se dan diferentes estados intermedios en las que parte de la fisura se encuentra abierta y la otra cerrada como se puede observar en la Figura 3.16 y en la Figura 3.17.

Por tanto con el análisis paralelo de ambas variables se puede observar no solo el desarrollo de la fisura sino también bajo qué condiciones de tensión se produce este crecimiento. En el módulo de visualización de resultados se puede observar la evolución de la fisura incremento a incremento según se van realizando. Puesto que la resolución completa puede llevar hasta decenas de miles de incrementos, en lo relativo a este documento se presentarán los resultados, salvo excepciones convenientemente indicadas, a intervalos angulares constantes de 45° .

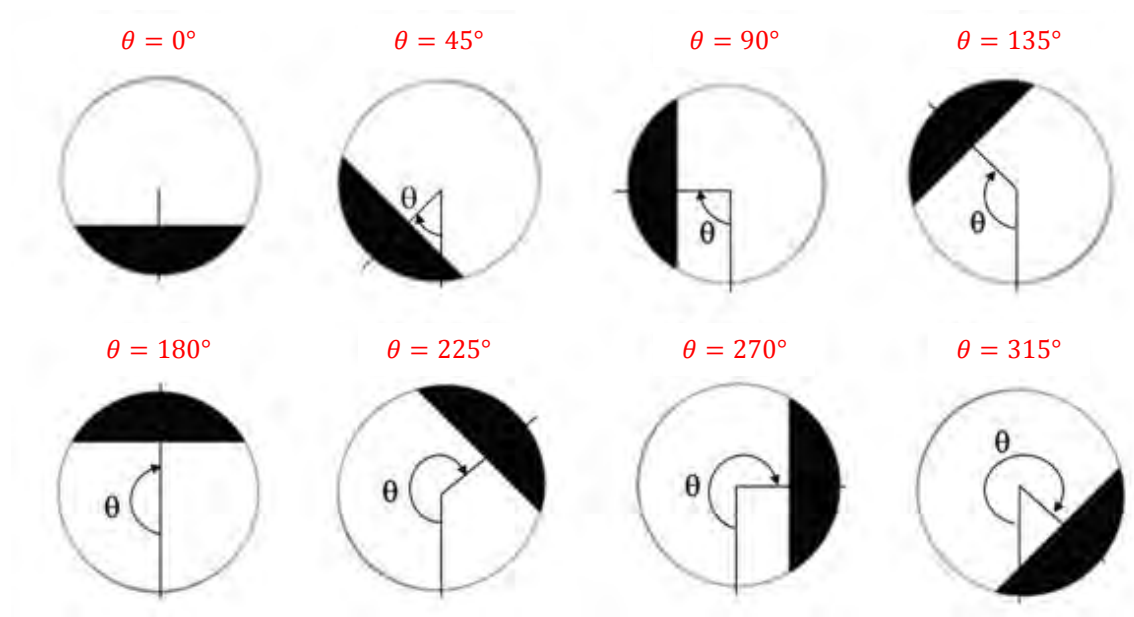


Figura 6.1 Intervalos en los que se mostraran los resultados en los casos estudiados

6.1.1.1 Aproximación mediante la MFEL

Antes de exponer los resultados se detalla el procedimiento seguido para ello y que se mantiene para todos los casos estudiados.

Los resultados se presentan en parejas de secciones, una pareja por cada incremento de ángulo considerado. La sección de la izquierda muestra la tensión normal a la sección (S_{33}); la de la derecha, la evolución de la fisura mediante la variable STATUSXFEM. Las leyendas que se muestran a continuación para ambas variables son válidas para todos los incrementos.

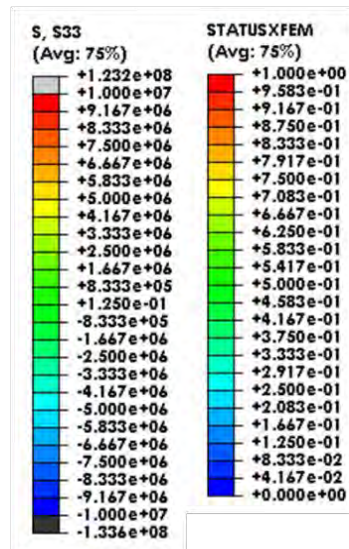
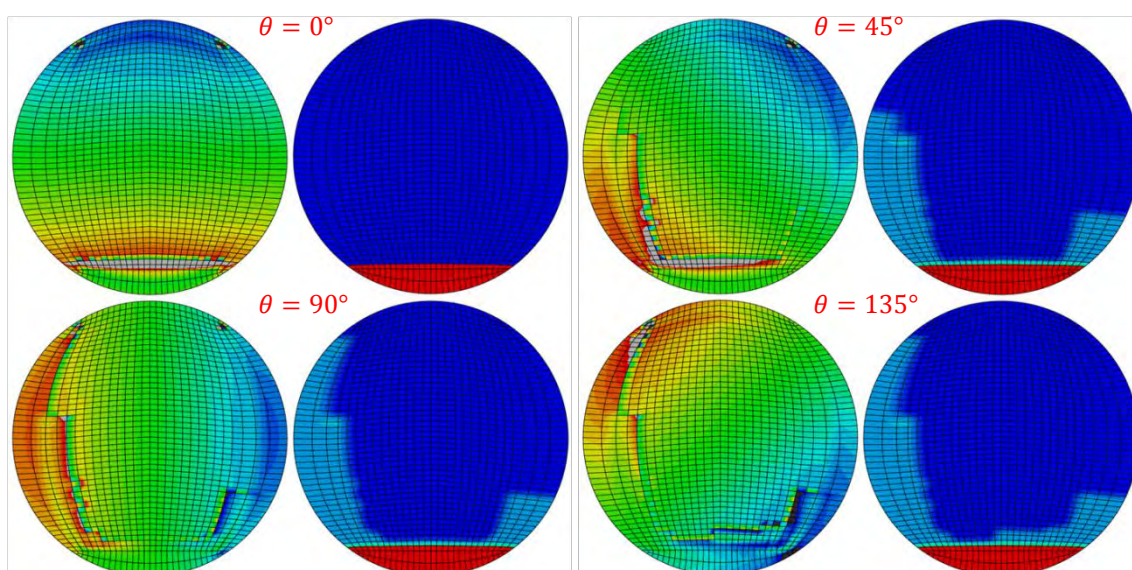
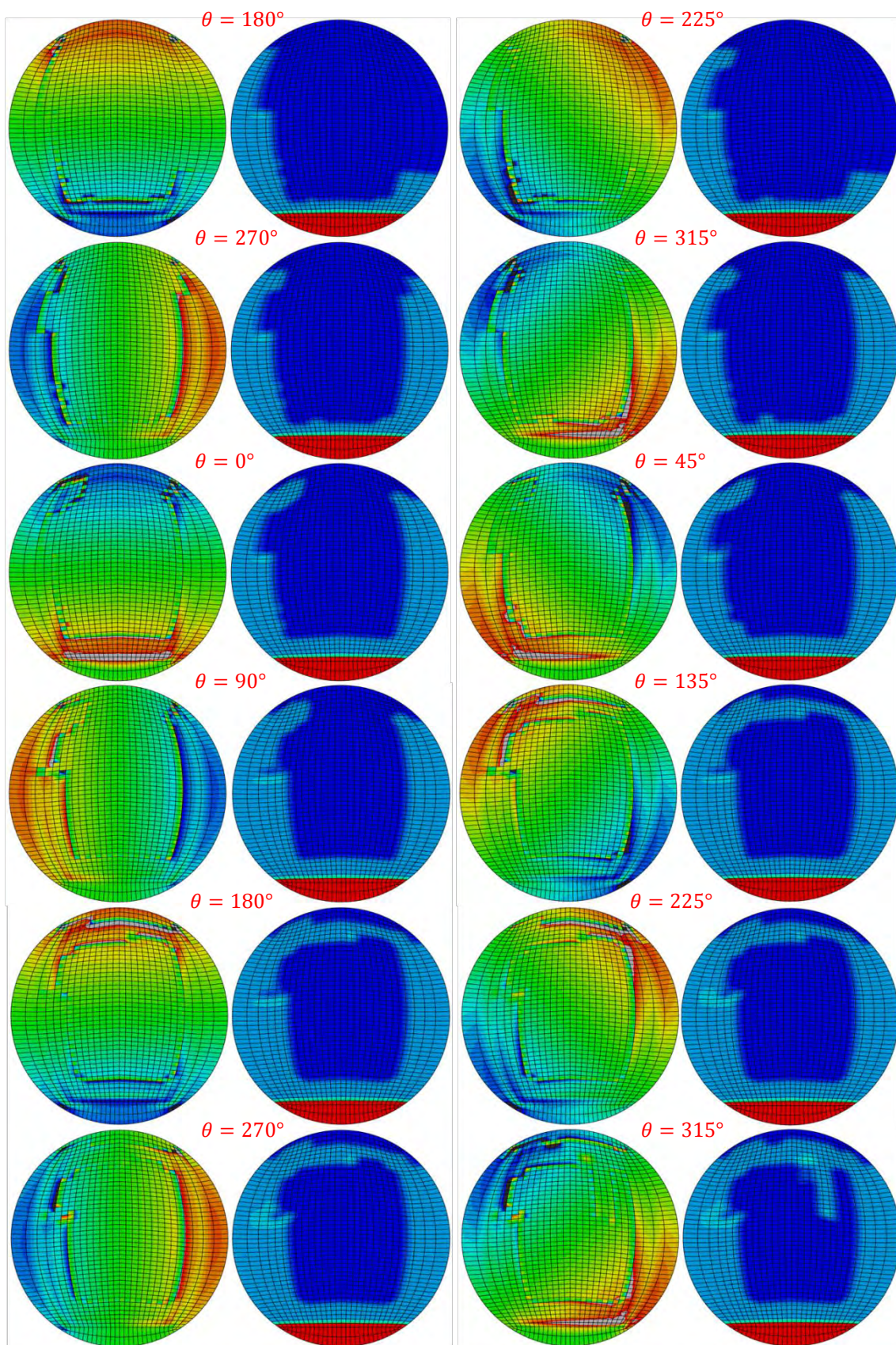


Figura 6.2 Leyendas S_{33} en Pascales (izquierda) y STATUSXFEM (derecha) para $a/D = 0.1$

En la visualización de la variable S_{33} se establecen unos límites máximo y mínimo con el objetivo de eliminar los valores extremos y poco representativos que se dan en algunos elementos debido a su distorsión geométrica y que impiden distinguir con claridad zonas de tracción y compresión.

A continuación se muestran los resultados utilizando la aproximación de la Mecánica de Fractura Elástico Lineal. Las figuras se leen por filas.





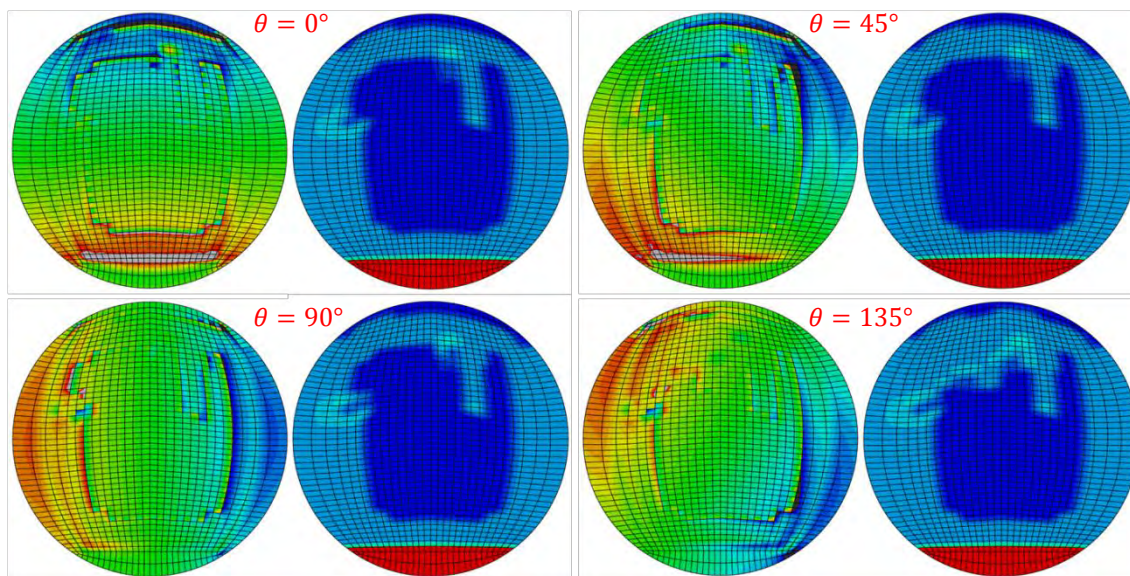


Figura 6.3 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.1$ mediante MFEL

Una primera observación es el hecho de que la fisura se propaga desde el inicio hacia ambos lados dando lugar a un frente de grieta irregular a diferencia del frente de grieta elíptico que se podía prever. Más adelante se explicarán en detalle los motivos de esta anomalía.

En cuanto a la distribución de tensiones, se observa que según la fisura se propaga, en estas zonas dañadas los valores de tensión aumentan. No obstante puesto que los elementos no llegan a fracturarse por completo su efecto es moderado. De esta forma, la zona con mayores tensiones sigue siendo el frente de grieta original.

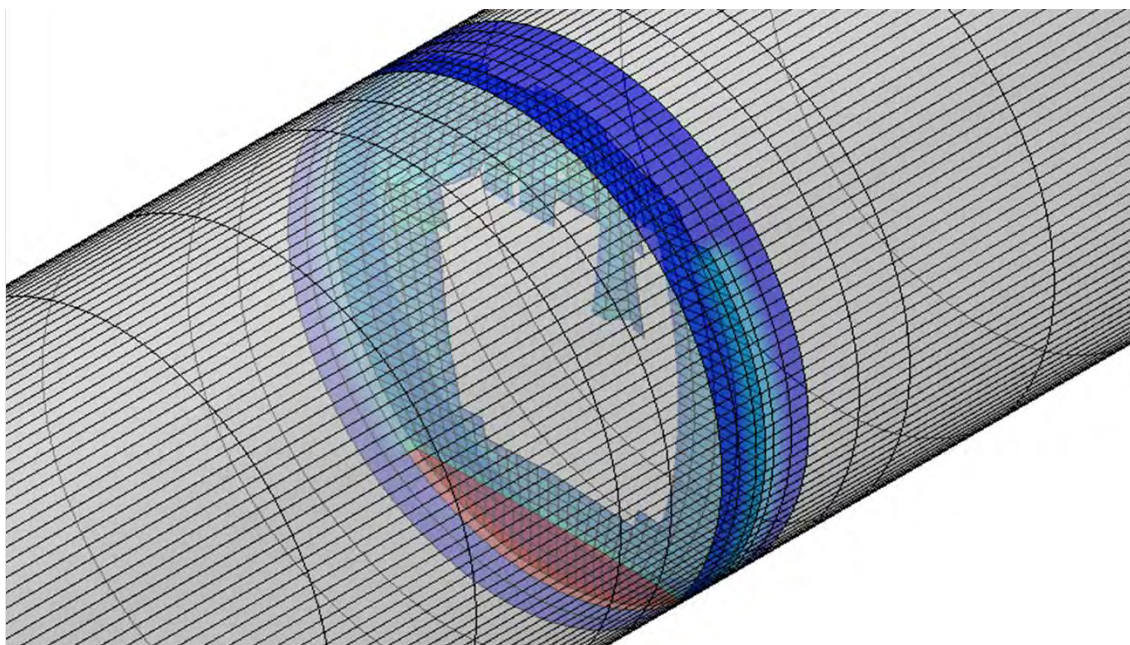


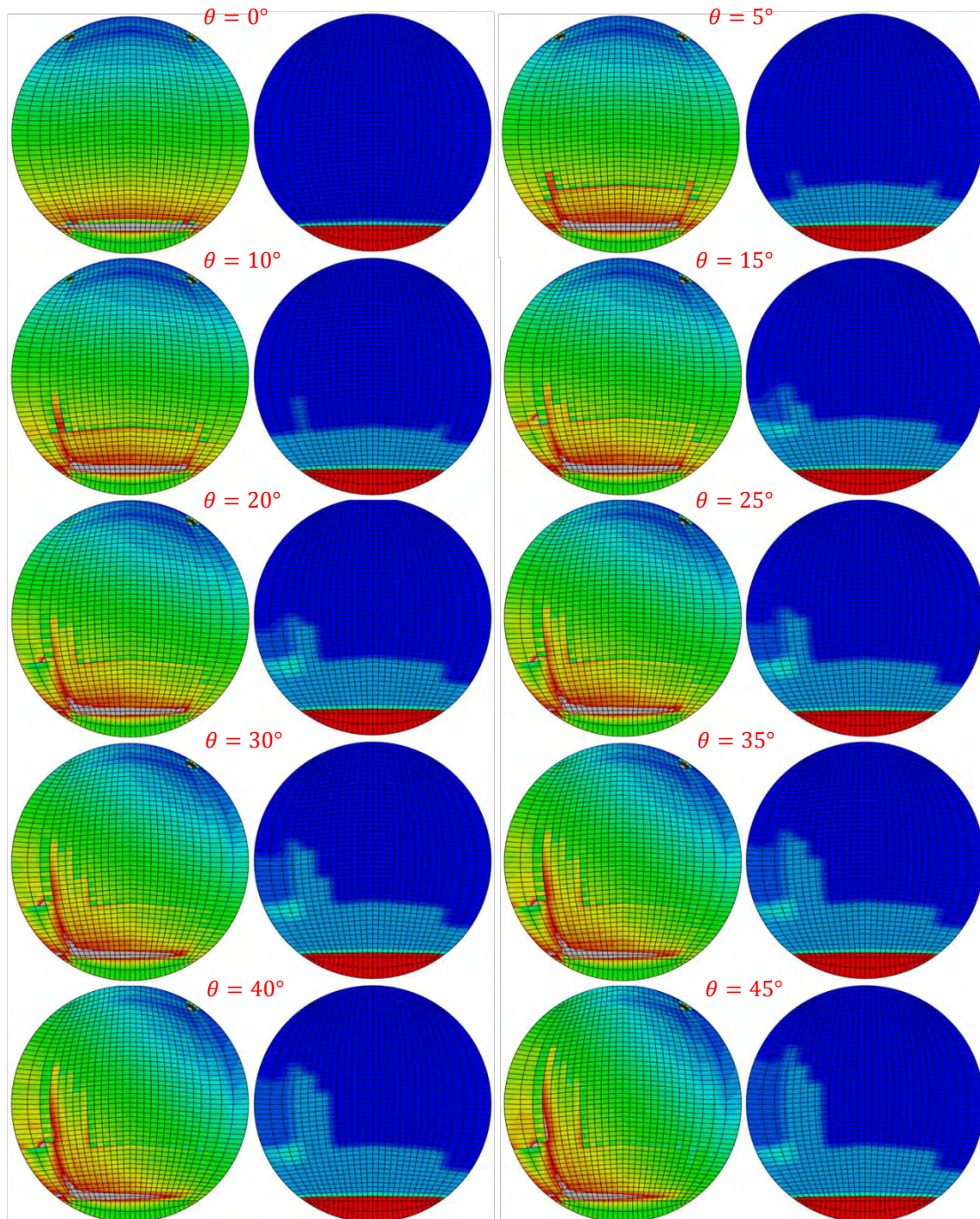
Figura 6.4 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.1$ mediante MFEL

Además a la hora de analizar la futura superficie de fractura se observa que no es completamente lisa, como se puede observar en la Figura 6.4, sino que presenta rugosidades ya que algunos elementos no se fisuran según el plano que contiene a la

fisura inicial. En la definición del modo de fractura se consideró la dirección de propagación de la grieta como aquella en la que las tensiones tangenciales sean máximas.

6.1.1.2 Aproximación mediante los CZM

En la Figura 6.5 se muestran los resultados obtenidos utilizando la aproximación de los Modelos de Zona Cohesiva.



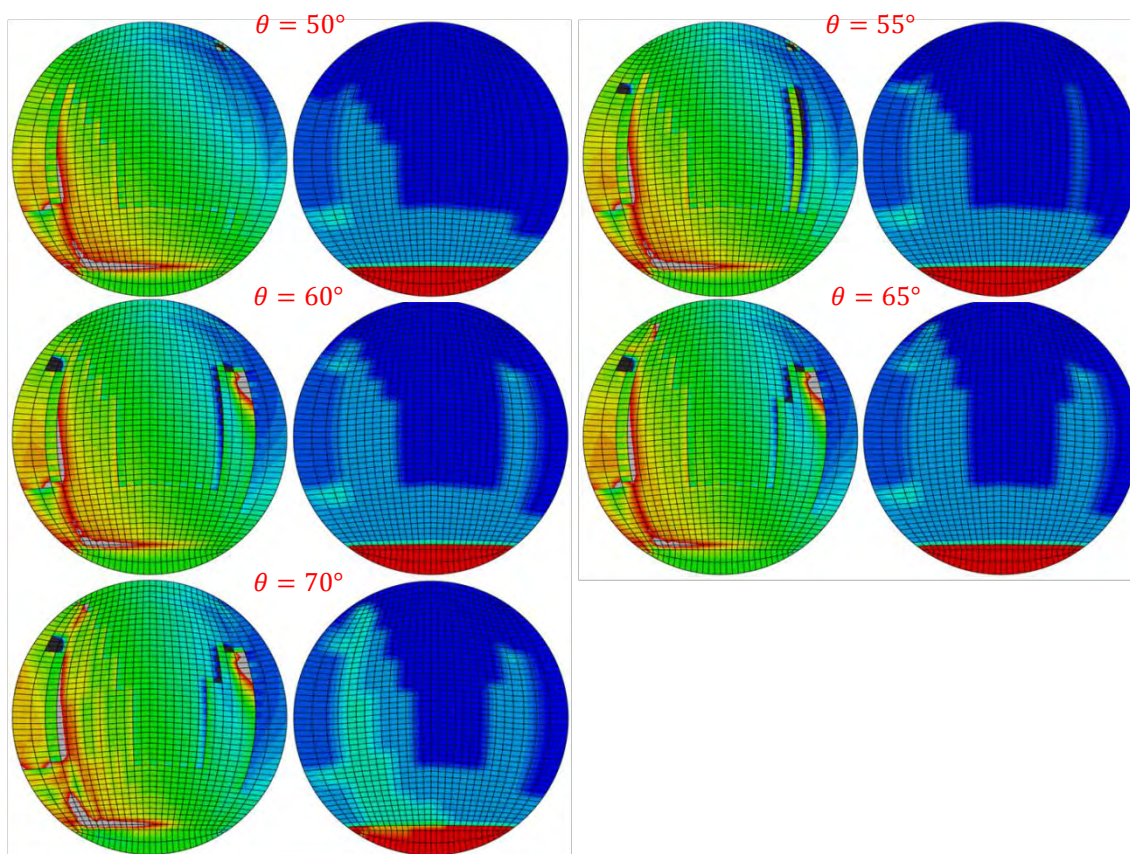


Figura 6.5 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.1$ mediante CZM

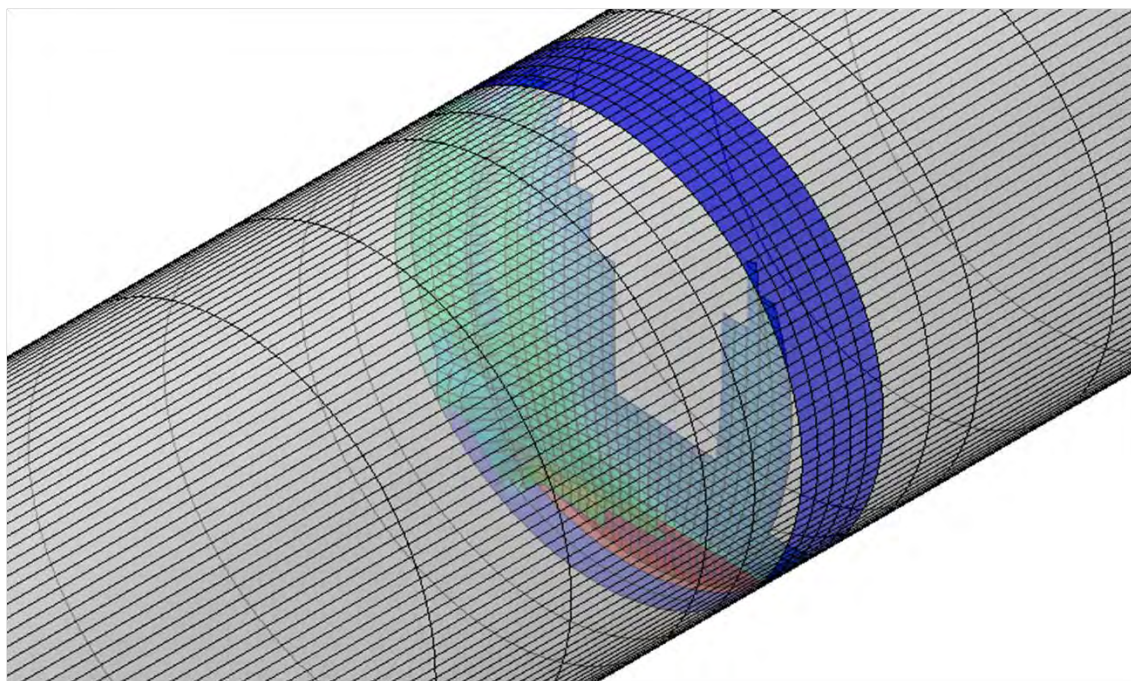


Figura 6.6 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.1$ mediante CZM

Cabe destacar que utilizando los CZM se hizo necesario utilizar un valor de tensión de inicio del daño más reducido, 5MPa, para poder observar el desarrollo de la fisura. En caso contrario la fisura seguía intacta tras numerosos ciclos. No obstante y a pesar de ese cambio el crecimiento de la fisura es limitado, en la mayoría de los casos,

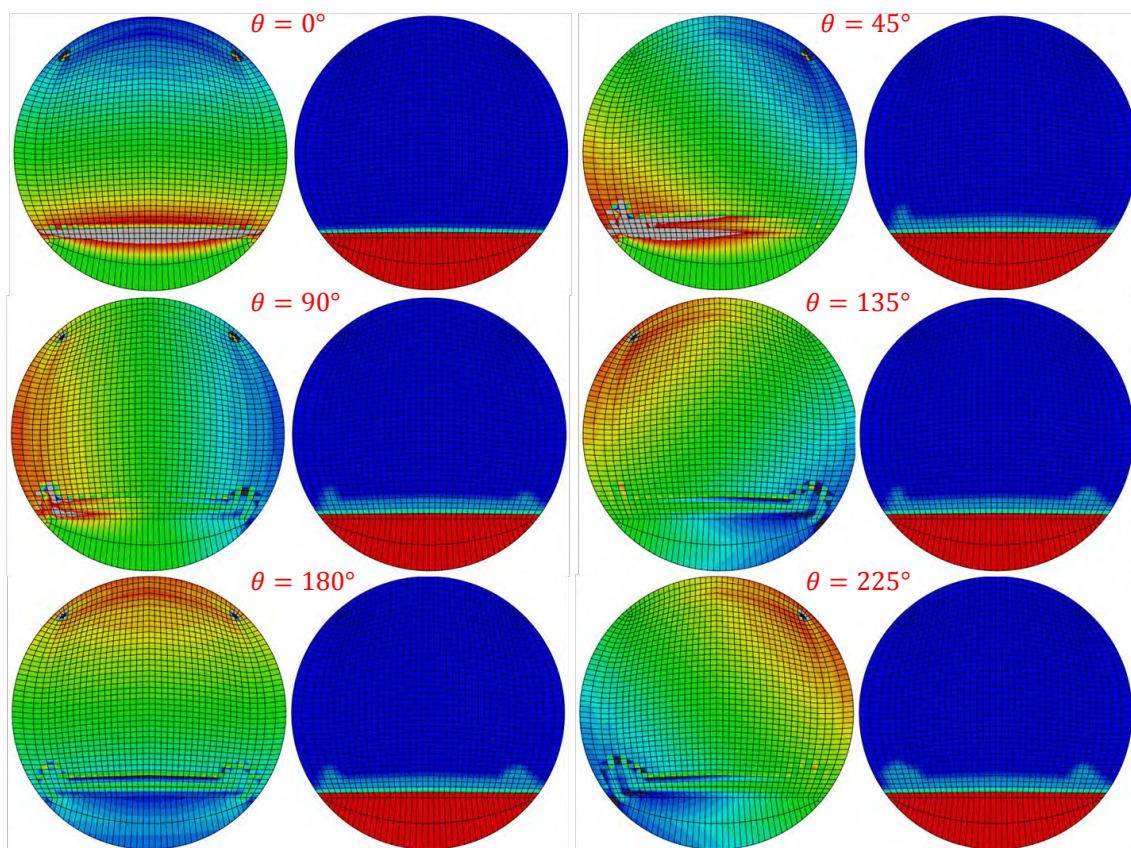
en comparación con el modelo MFEL. De hecho en lugar de incrementos de 45° se muestran resultados cada 5° de giro ya que ni siquiera se alcanzan los 90° de rotación en total. No obstante, la forma en que se desarrolla la fisura en los primeros estadios supone una buena aproximación a cómo se produciría en la realidad.

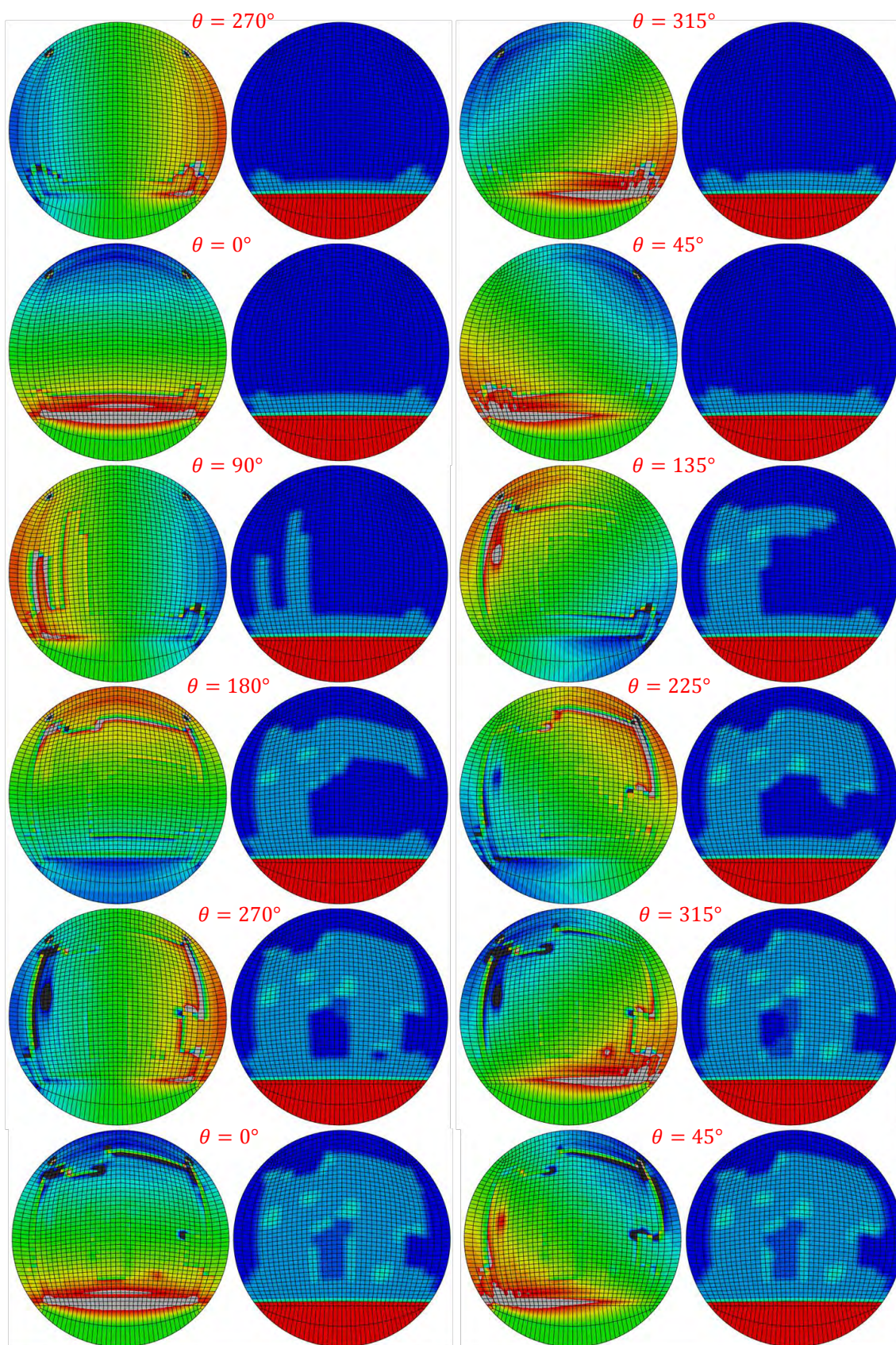
En este caso es posible apreciar como una vez alcanza la fisura el perímetro superior del eje, se nuclea una nueva grieta que se desarrolla de arriba a abajo a través de un plano paralelo al inicial de la fisura. Este comportamiento nos permite comentar la capacidad que tiene el XFEM no solo de propagar fisuras existentes sino de nuclear otras nuevas. Para que esto se produzca deben darse dos condiciones: en primer lugar que se supere el criterio de inicio de daño (en este caso la tensión de inicio del daño) en algún punto, y por otro lado que este punto se sitúe en una zona enriquecida con XFEM mediante nodos fantasma.

6.1.2 Tamaño de fisura $a/D = 0.2$

Se procede a analizar los resultados de ambas aproximaciones para este nuevo tamaño de fisura.

6.1.2.1 Aproximación mediante la MFEL





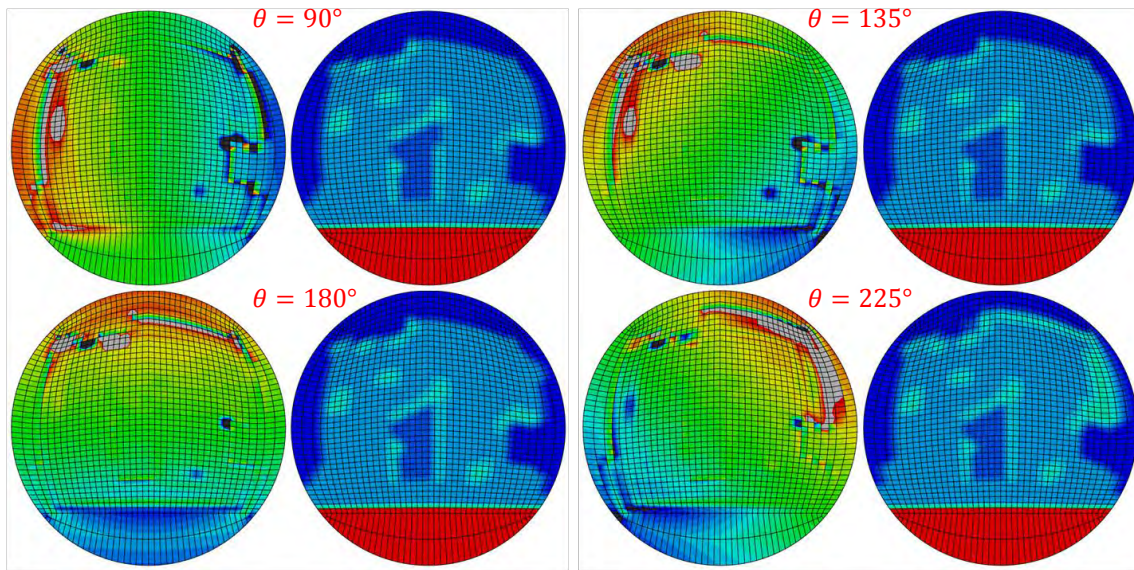


Figura 6.7 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.2$ mediante MFEL

Debido a que el tamaño de la grieta inicial es mayor que en el caso inicial se observa con mayor claridad la distribución de tensiones en la fisura cuando esta está abierta o cerrada. Cuando, por el giro del eje, la fisura se encuentra situada en la zona que correspondería a las fibras traccionadas, las caras de la fisura se separan por lo que no transmiten tensión. En cambio cuando se encuentra en una zona donde corresponden compresiones, la fisura se cierra y sus caras entran en contacto transmitiendo esas tensiones.

Debido quizás también a este mayor tamaño, el desarrollo inicial de la fisura es más uniforme. En el apartado 6.2 de conclusiones se describen algunos detalles de este comportamiento. También se puede apreciar en la Figura 6.8 el desarrollo rugoso de la superficie de rotura ya comentado.

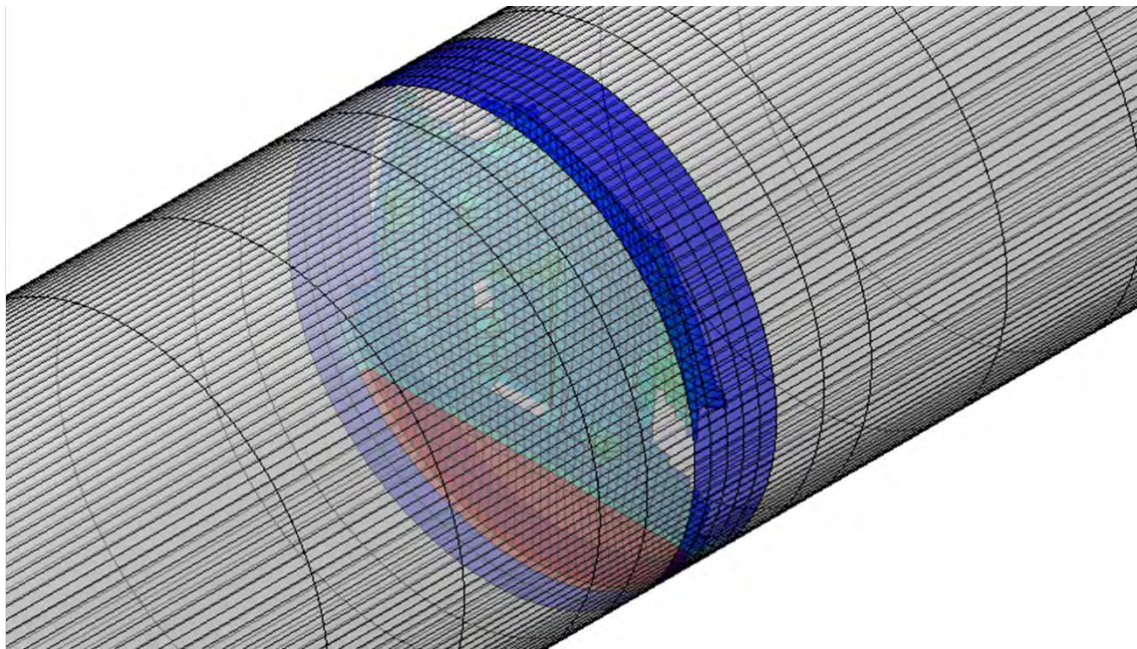


Figura 6.8 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.2$ mediante MFEL

6.1.2.2 Aproximación mediante los CZM

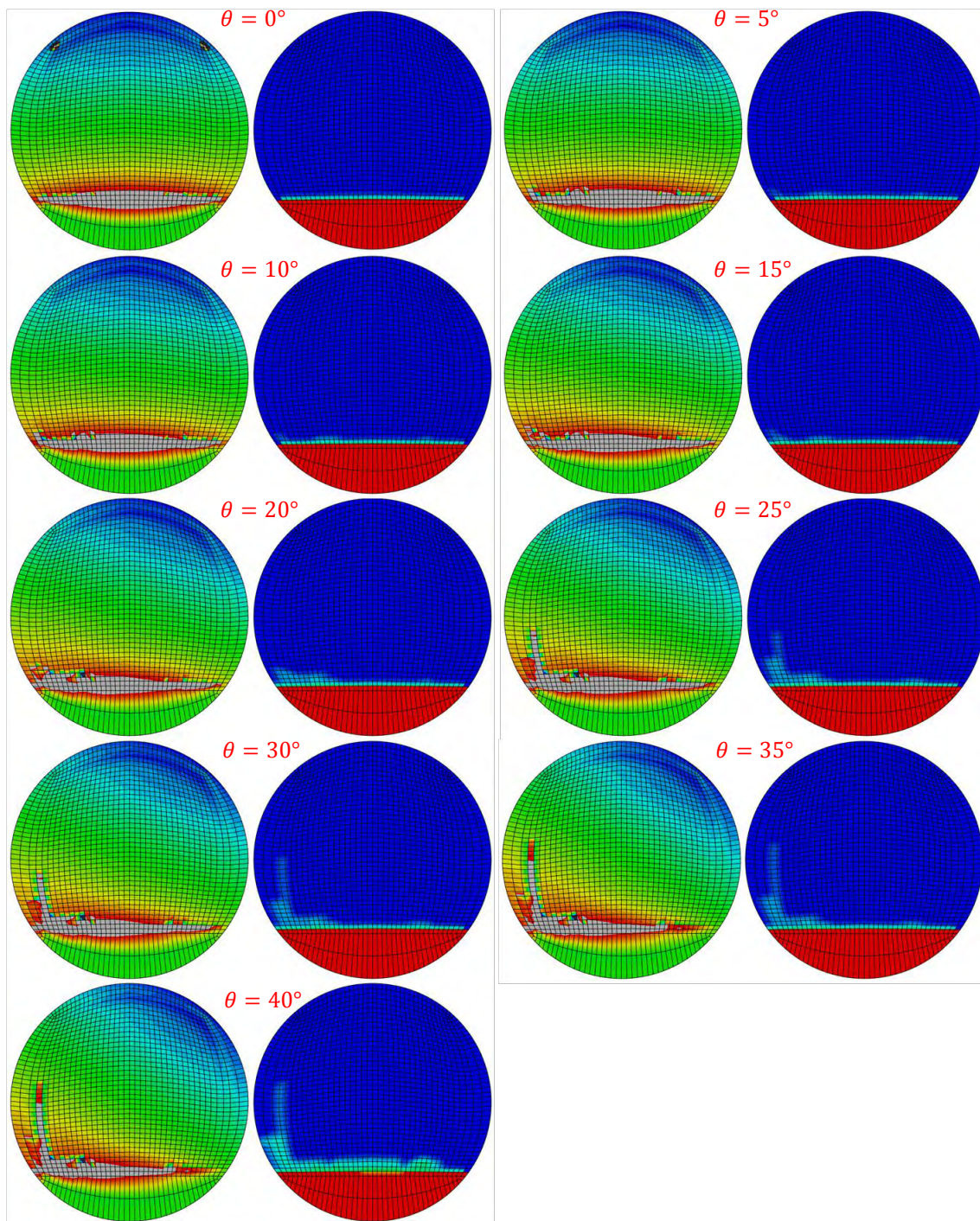


Figura 6.9 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.2$ mediante CZM

El dato más destacable es que apenas se alcanza una rotación de 45° y por ello se muestran los resultados cada 5° de giro del eje.

La Figura 6.10 se muestra significativa ya que es el primer caso en el que se observa un cambio brusco en la dirección de la propagación de la fisura. En lugar de producirse en el plano inicial de la misma se producen en dirección perpendicular.

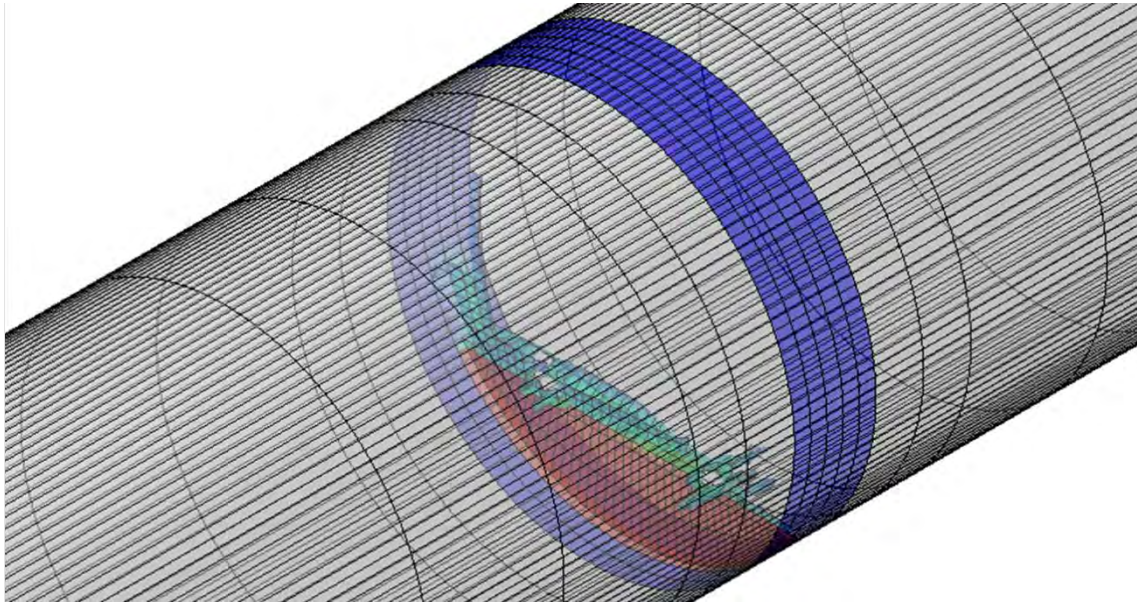
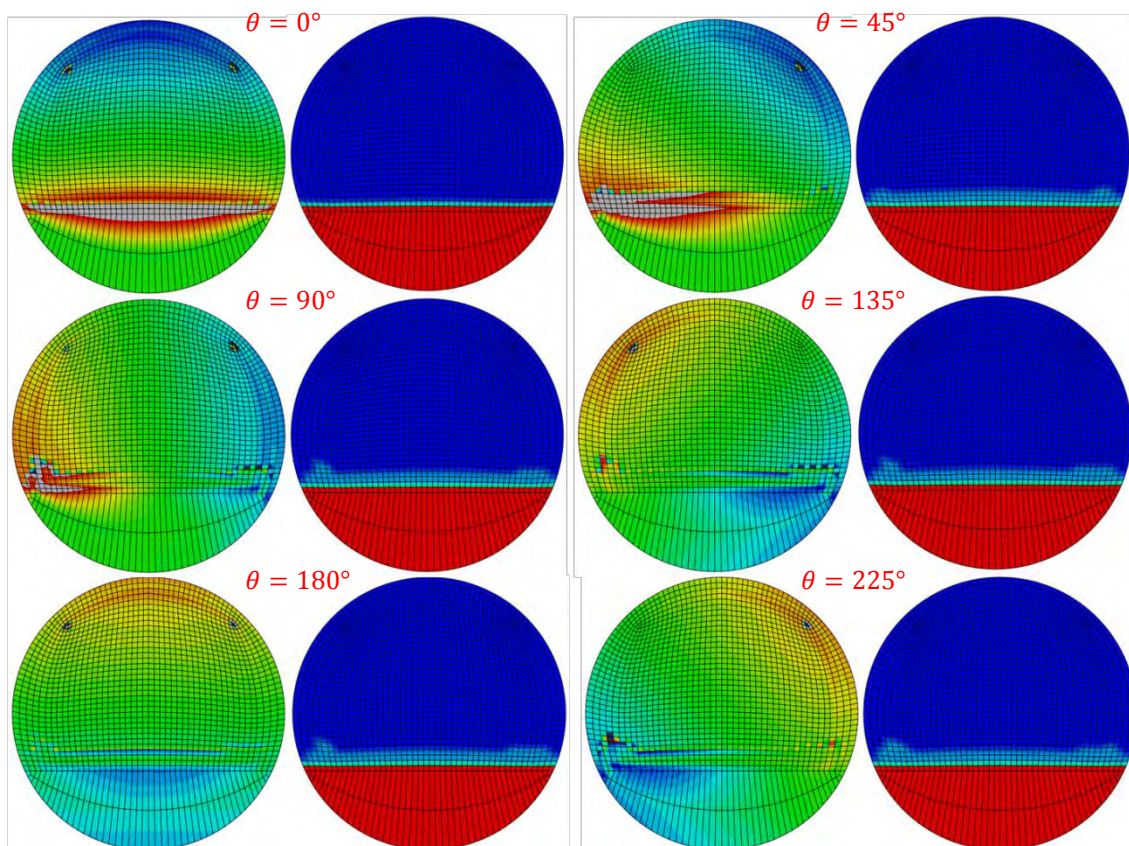
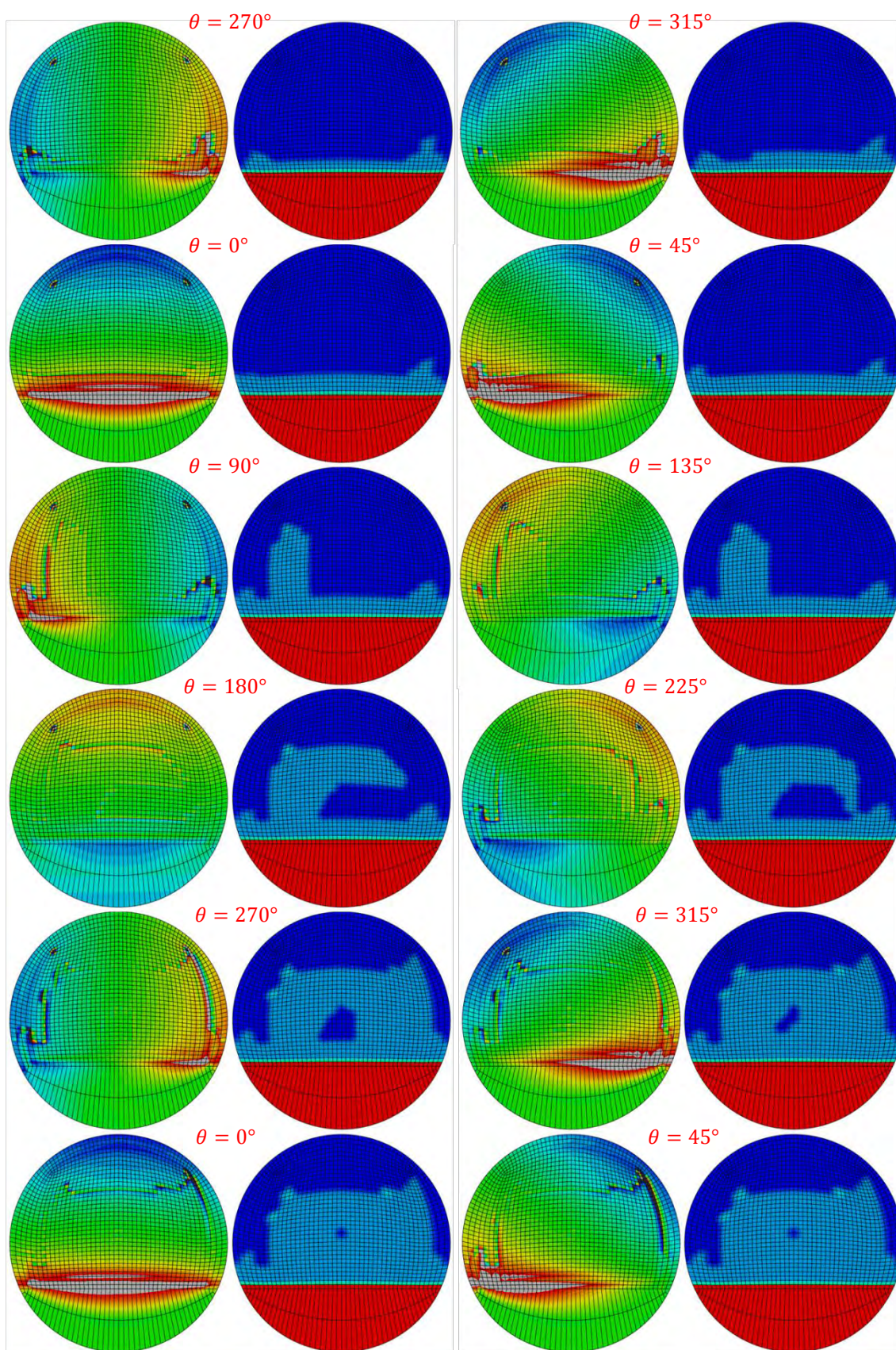


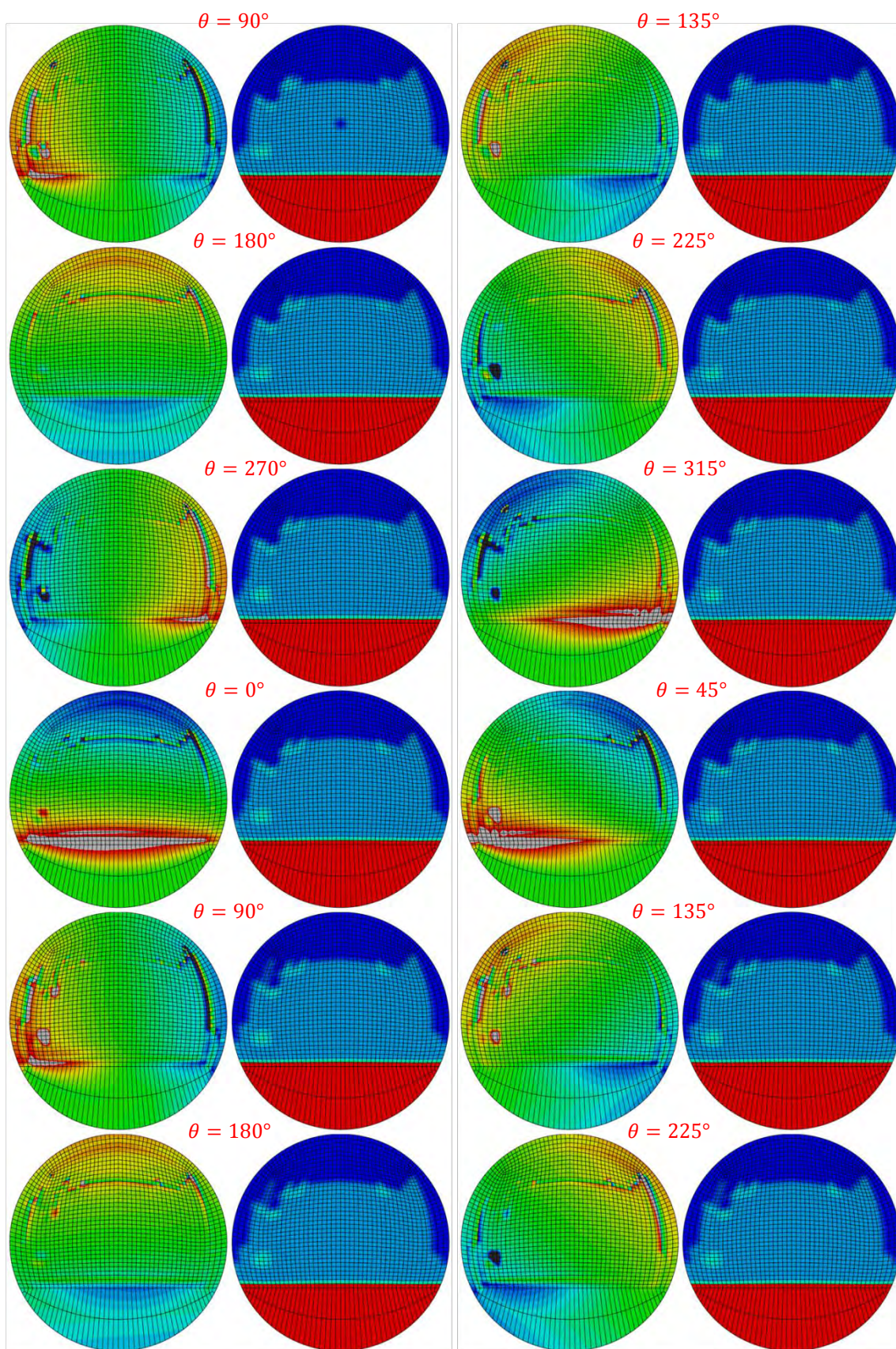
Figura 6.10 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.2$ mediante CZM

6.1.3 Tamaño de fisura $a/D = 0.3$

6.1.3.1 Aproximación mediante la MFEL







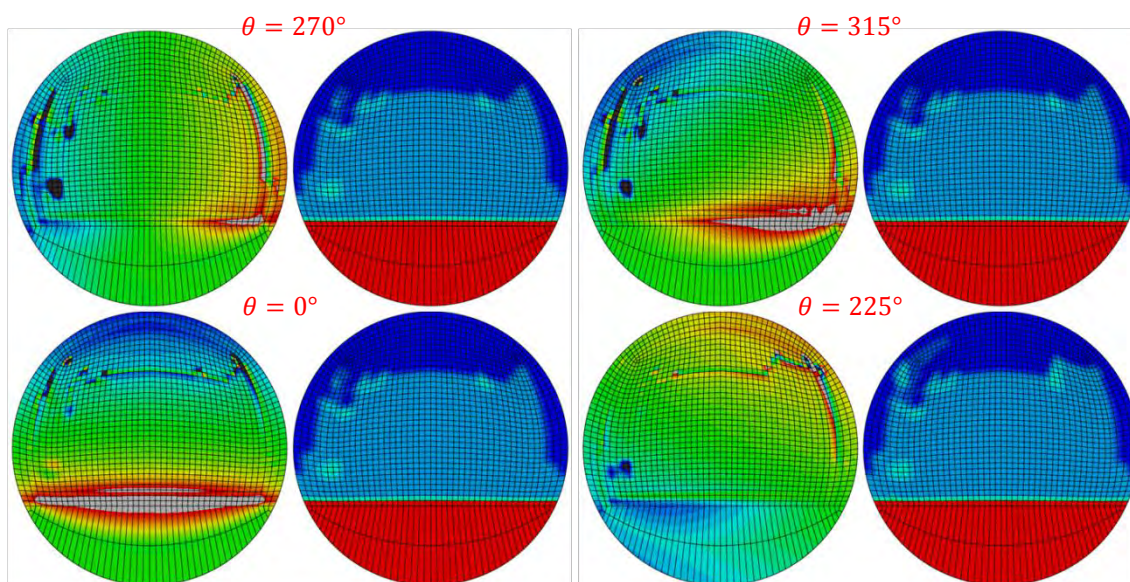


Figura 6.11 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.3$ mediante MFEL

En este archivo de resultados se alcanza los 20.000 incrementos -que se establecieron en un comienzo como límite- aunque desde el incremento 3500 aproximadamente no se produce un mayor desarrollo.

La fisura, en este caso, se desarrolla lisa y en el mismo plano inicial de la misma prácticamente en toda su extensión. Solo cuando la fisura se acerca al borde superior se produce una mayor distorsión en la superficie de rotura.

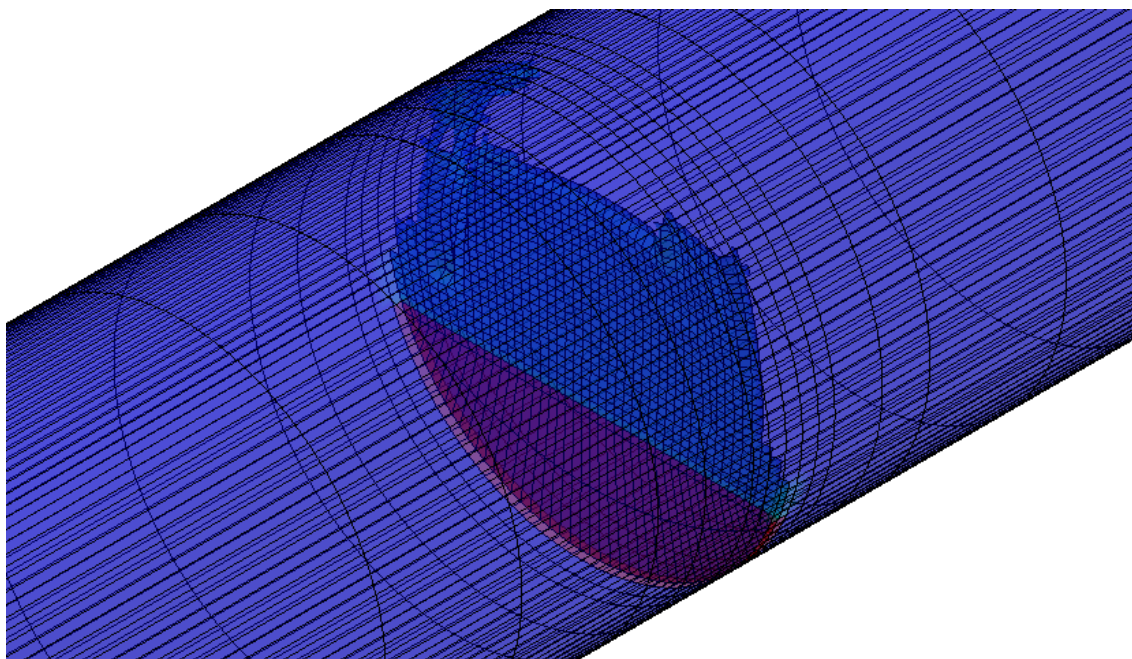


Figura 6.12 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.3$ mediante MFEL

6.1.3.2 Aproximación mediante los CZM

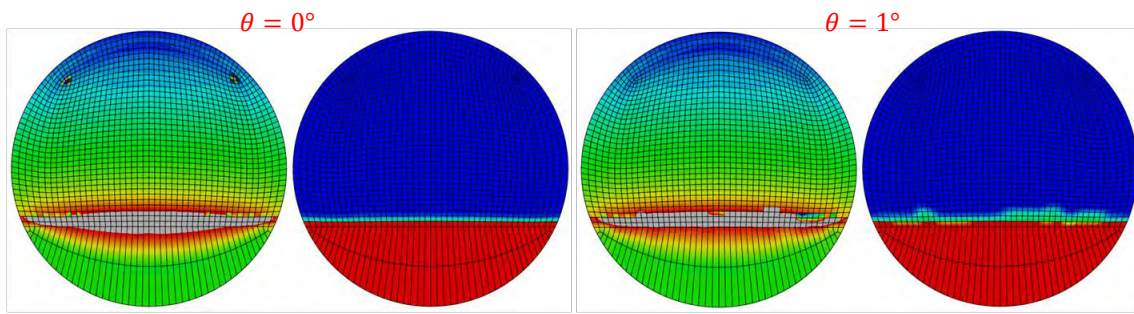


Figura 6.13 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.3$ mediante CZM

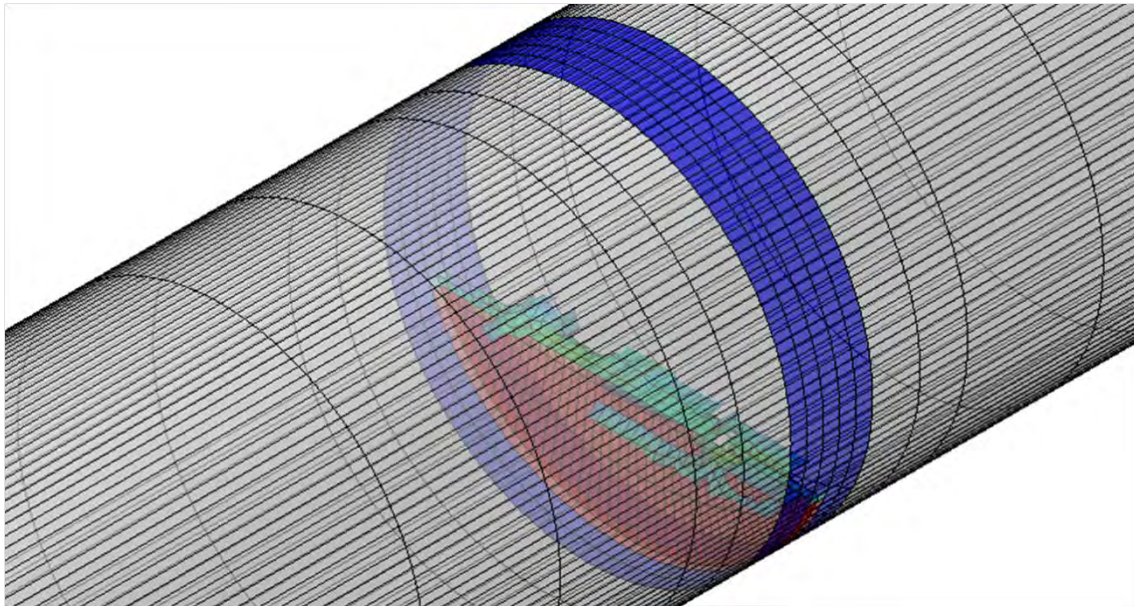
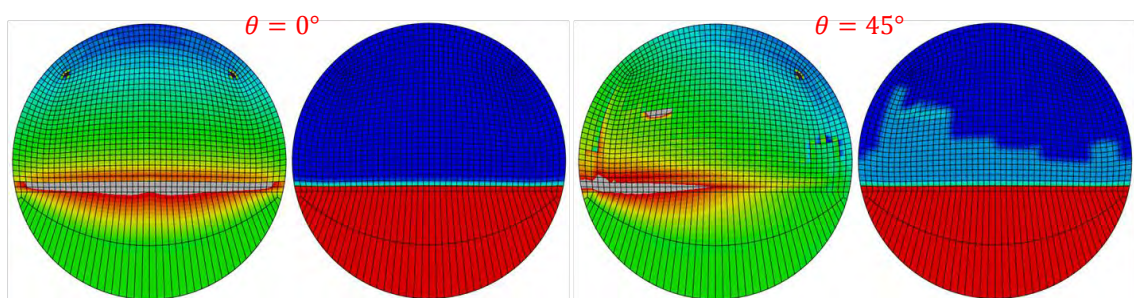


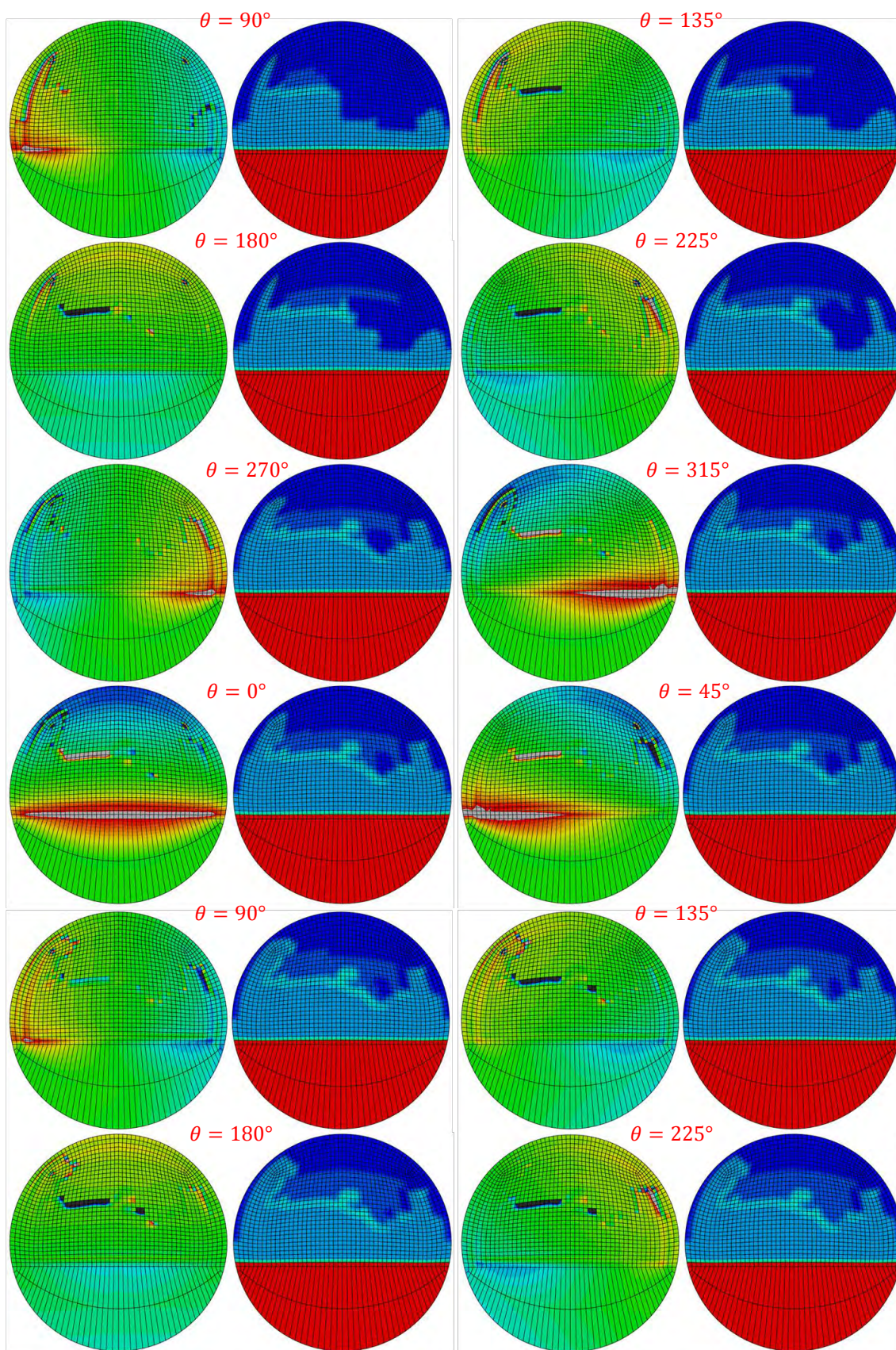
Figura 6.14 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.3$ mediante CZM

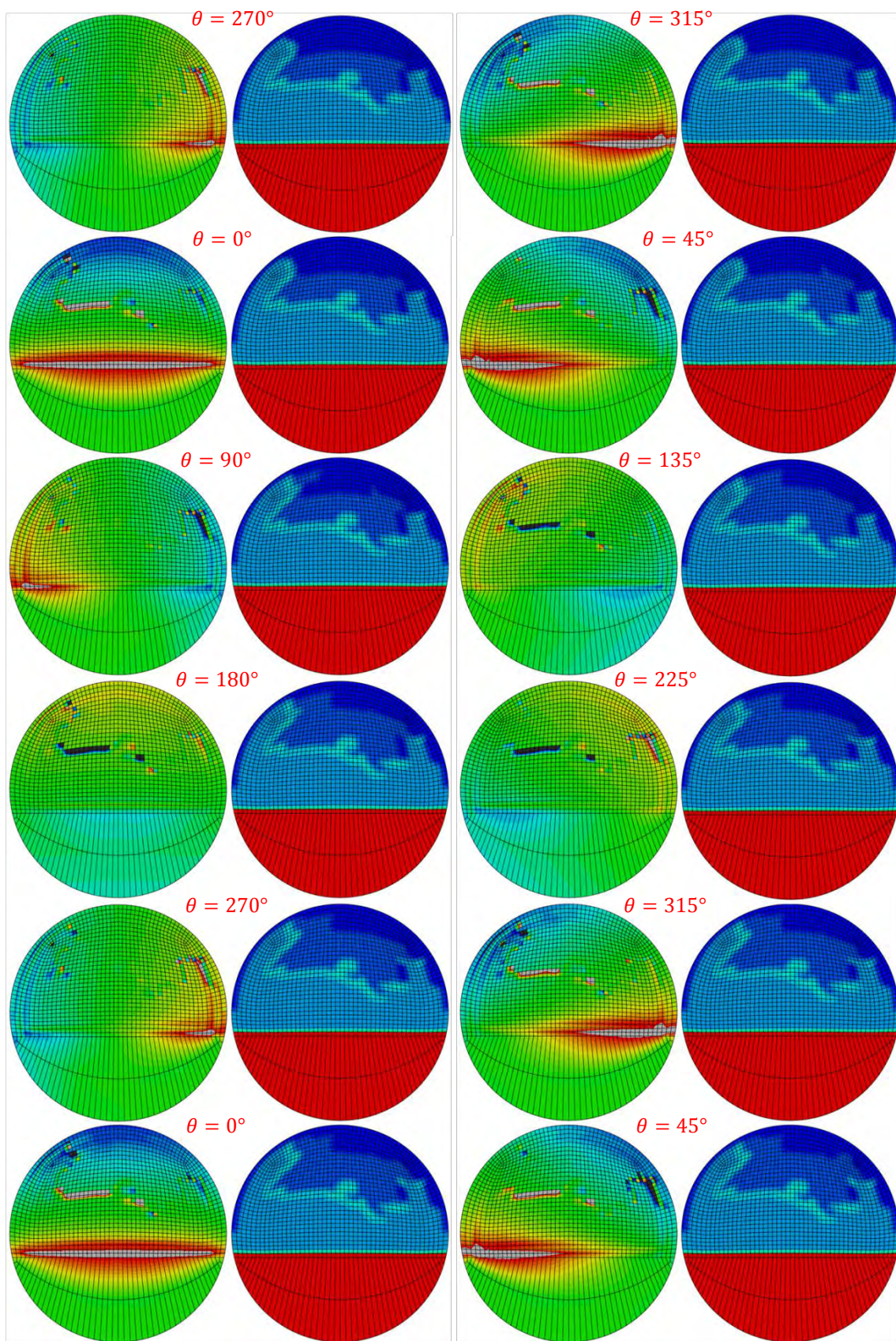
Los resultados son muy limitados ya que se la fisura se propaga desde el primer momento en dirección perpendicular al plano de la fisura abortando apenas tras 14 incrementos.

6.1.4 Tamaño de fisura $a/D = 0.4$

6.1.4.1 Aproximación mediante la MFEL







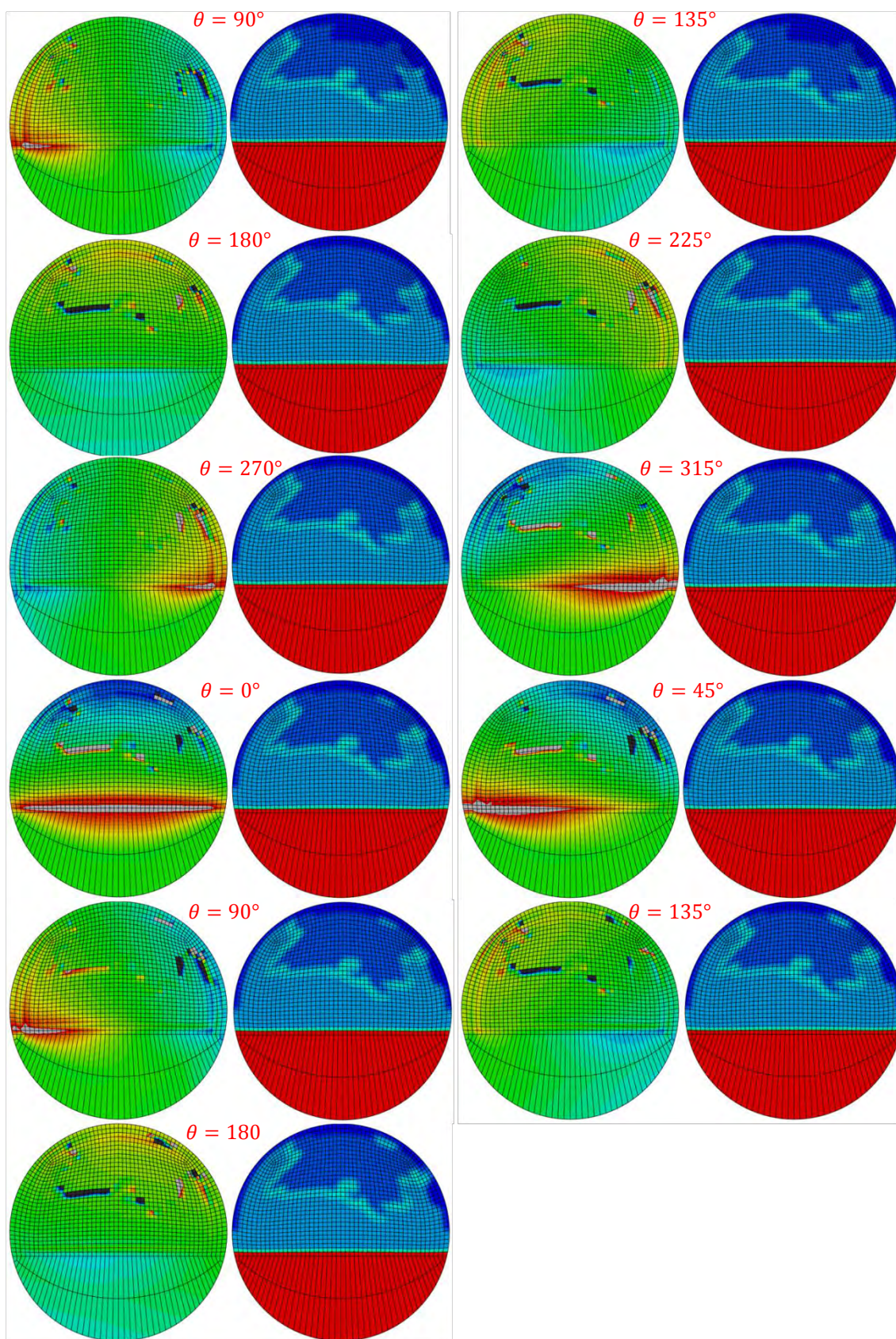


Figura 6.15 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.4$ mediante MFEL

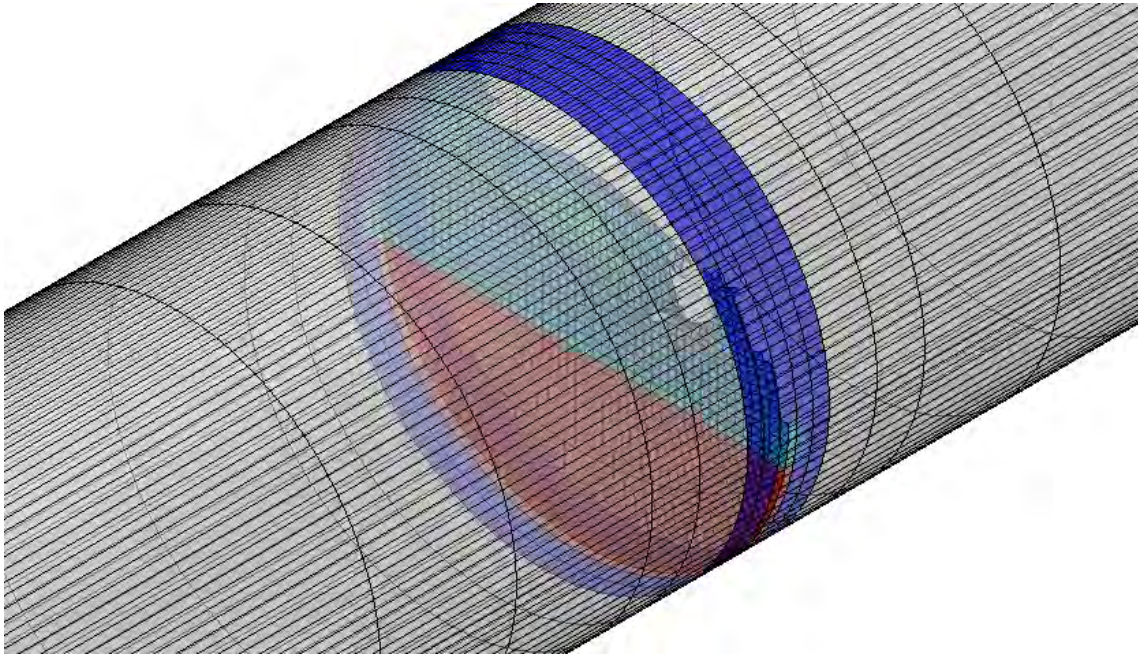


Figura 6.16 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.4$ mediante MFEL

Para estas condiciones se consigue un desarrollo inicial muy rápido de la fisura. Al ser ésta la de mayor tamaño, el efecto concentrador de tensiones en el frente de grieta es más elevado a lo que se suma la menor sección efectiva del eje. Por ello ya en los primeros 45° de giro se produce un gran crecimiento de la fisura. En cuanto a su morfología cabe destacar que se puede suponer la más representativa de la realidad

Por ese mayor tamaño de fisura inicial, se observa más fácilmente el proceso de apertura y cierre de la misma. A continuación se muestran las dos situaciones extremas: la fisura completamente abierta cuando se encuentra en el punto inferior de la trayectoria sometida a tracción y cuando se encuentra en el punto superior y por tanto sometida a compresión.

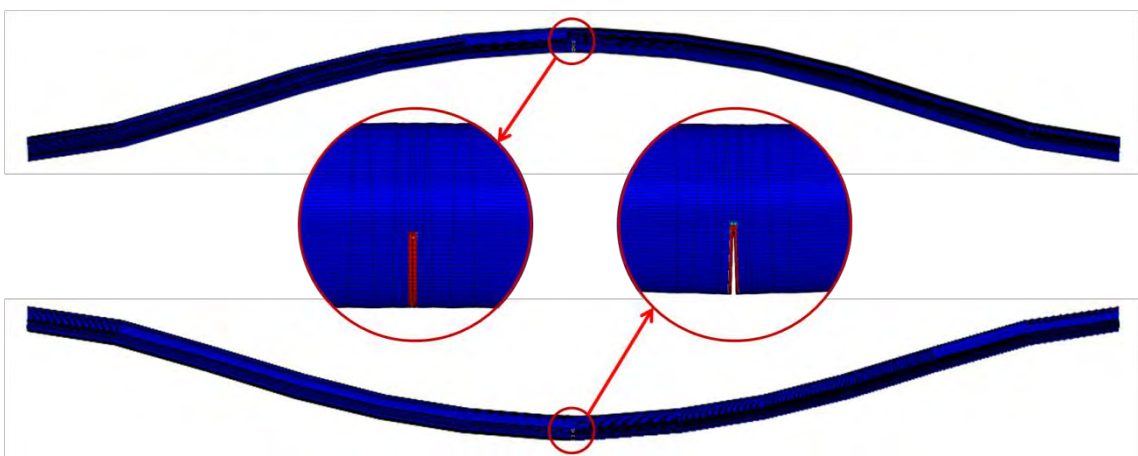


Figura 6.17 Posiciones de fisura cerrada (arriba) y abierta (abajo)

6.1.4.2 Aproximación mediante los CZM

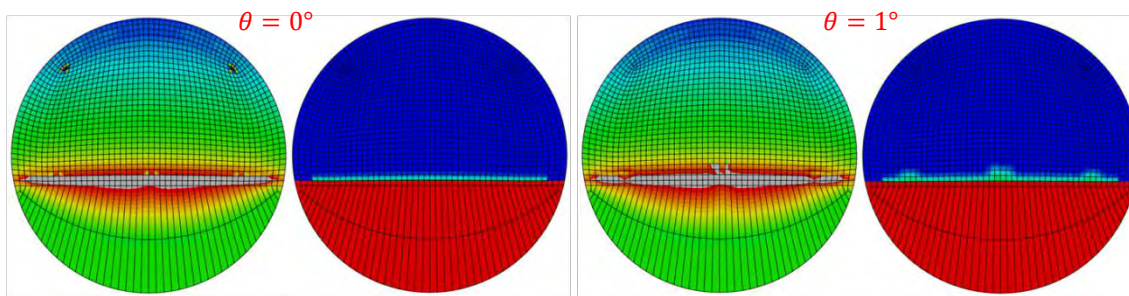


Figura 6.18 Resultados S33 y STATUSXFEM fisura $a/D = 0.4$ mediante CZM

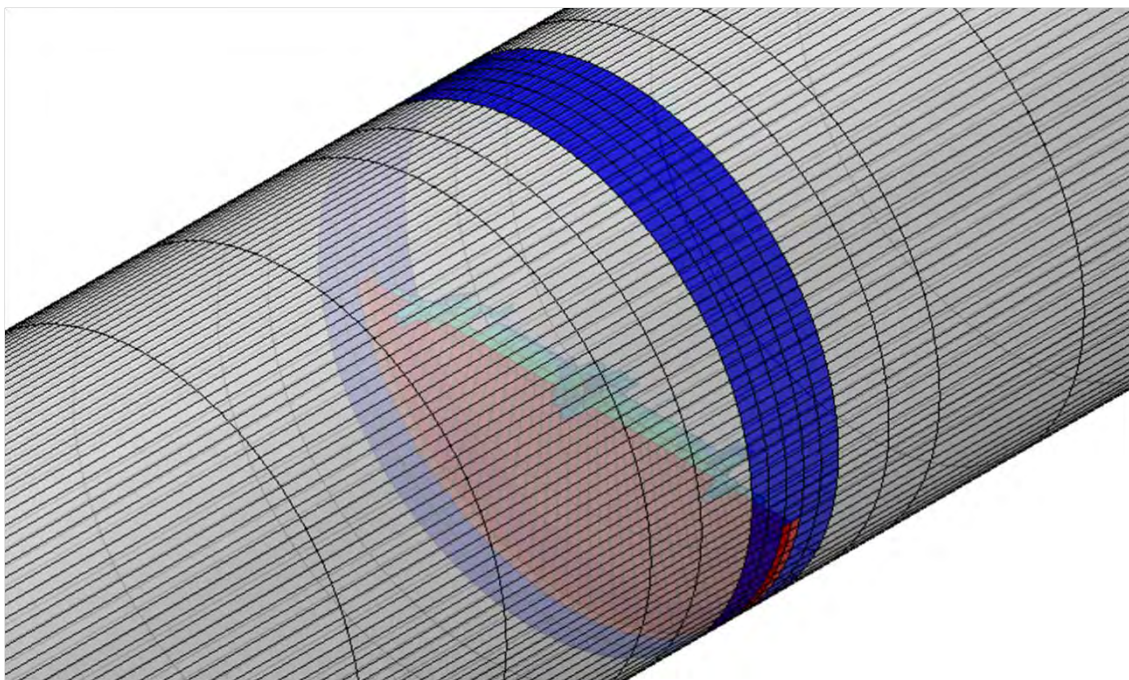


Figura 6.19 Vista interior de la sección fisurada para fisura $a/D = 0.4$ mediante CZM

6.2 Discusión de resultados

En primer lugar, cabe destacar la dificultad de simular un proceso altamente dinámico como el del desarrollo de grietas de fatiga en ejes rotativos en un estudio estático -ya que el XFEM solo está disponible en los *steps* de tipo *Static*-. La mayoría de los casos de estudio utilizando esta técnica se basan en modelos bidimensionales o tridimensionales sencillos con cargas y condiciones de contorno simples que facilitan un rápido desarrollo de la fisura. En cambio, el caso que nos atañe supone un proceso mucho más complejo ya que no solo engloba el mecanismo de la fractura sino también el proceso de fatiga a flexión del eje.

El proceso de apertura y cierre de la fisura es crítico en el estudio del desarrollo de la propagación de fisuras en ejes rotativos y por tanto era necesario considerar un sistema conjunto de esfuerzos y condiciones de contorno que permitieran simular este comportamiento. En cuanto a las cargas, como se describe en el apartado 5.2.3, se opta por introducir dos fuerzas sinusoidales, una horizontal y otra vertical, desfasadas

de modo que la superposición de ambas permite la deformación del eje en todas las direcciones del plano. Sin embargo, estas aproximaciones presentan inexactitudes a la hora de conseguir que las secciones del eje sigan una trayectoria circular alrededor de su posición de equilibrio. Aunque en ciertas ocasiones se consigue, el comportamiento más habitual consiste en que las secciones del eje describen una trayectoria cuadrada como se representa en la Figura 6.20.

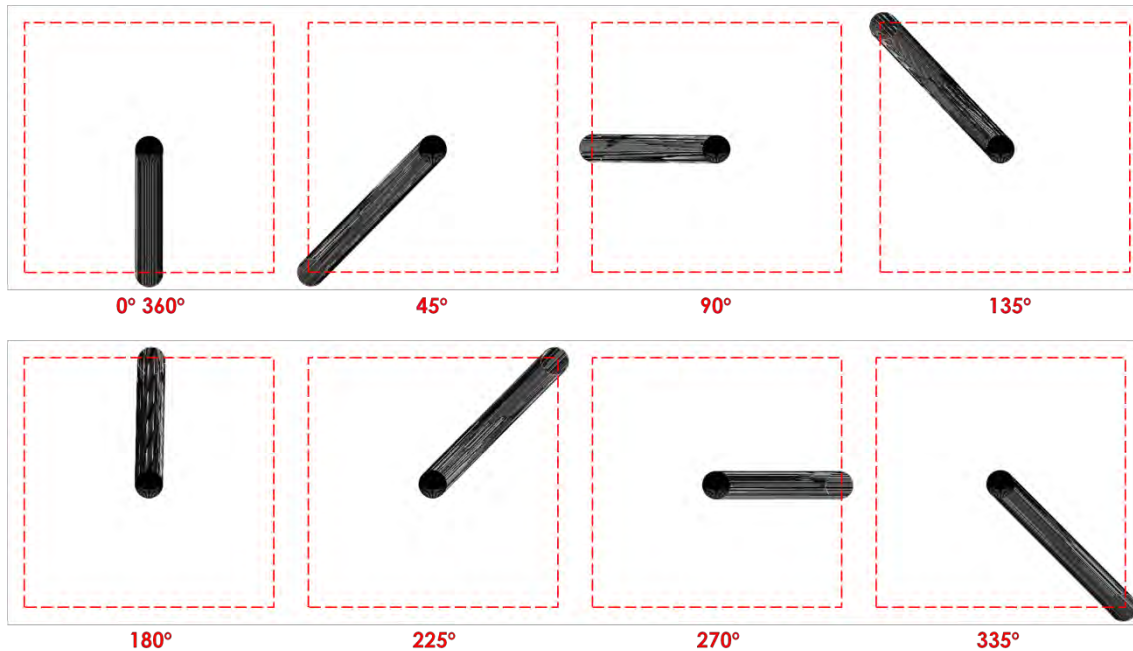


Figura 6.20 Representación de la trayectoria que recorre la sección central durante el giro

Este hecho supone una desviación respecto al proceso ideal de *breathing* de la fisura. En éste la mayor apertura de la fisura aparece cuando se encuentra en el punto más bajo de la trayectoria circular, cuando las tensiones que les corresponden son máximas de tracción. En cambio en el caso del modelo estudiado, las tensiones máximas de tracción, debido a la carga de componente vertical, se mantienen durante toda la arista horizontal inferior de la trayectoria. Por tanto las máximas tensiones se alcanzan cuando la fisura se sitúa en los extremos de este tramo (vértices inferiores del cuadrado descrito) donde las tensiones de tracción debidas a la carga de componente horizontal se hacen máximas.

Como consecuencia de este hecho se produce un desarrollo predominante de la fisura a ambos extremos del frente de la misma, siendo más acusado cuanto menor es el tamaño inicial de la fisura. Recordar que el desarrollo habitual de fisuras de fatiga en ejes se realiza con forma semi-elíptica (ver Figura 3.14).

A este hecho se le superpone otro defecto, en este caso relativo al mallado. En el mallado estructurado de la sección del eje aparecen elementos distorsionados (ver Figura 6.21 en la que se pueden observar elementos que presentan en algunos de sus vértices ángulos muy reducidos). Esto provoca que en comparación con elementos sometidos a una deformación similar el valor de tensión que soportan sea mayor. Puesto que se utiliza un criterio de inicio de daño en los elementos basado en tensiones, MAXPS, los alrededores de estos elementos se convierten en las zonas más probables del desarrollo inicial de la fisura, como finalmente sucede.

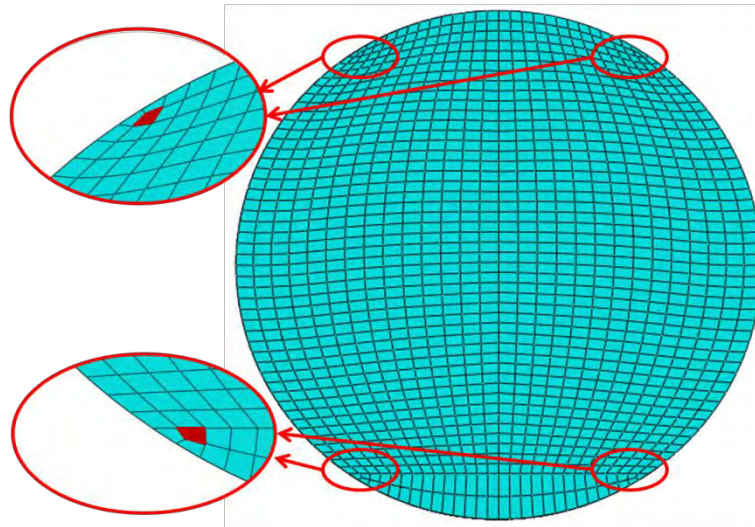


Figura 6.21 Elementos distorsionados en la sección transversal de una fisura $a/D = 0.1$

Estas concentraciones de tensiones no solo condicionan el inicio de la fisura sino también su posterior desarrollo. Como se puede observar en las figuras donde se muestran los resultados, al desarrollarse la fisura los elementos dañados suponen una nueva zona de concentración de tensiones que facilita que la evolución de la fisura siga ese camino inicial, sea el correcto acorde a la realidad o no.

Este hecho es más acusado contra menor es el tamaño de la fisura inicial. Cuando la fisura es reducida la distribución de tensiones en el frente de grieta no es uniforme a lo largo del mismo. La citada distorsión geométrica de ciertos elementos provoca que los mayores valores de tensión se encuentren en los extremos del frente. Según se aumenta el tamaño de fisura inicial este efecto se reduce progresivamente permitiendo una distribución uniforme de las tensiones en el frente de grieta. En la Figura 6.22 se representa el estado tensional según el criterio de Von Mises para los cuatro tamaños estudiados. Notar que estas distribuciones corresponden al primer incremento del *step* con lo que la fisura se encuentra en la posición central del tramo horizontal inferior descrito en la Figura 6.20 y por tanto completamente abierta.

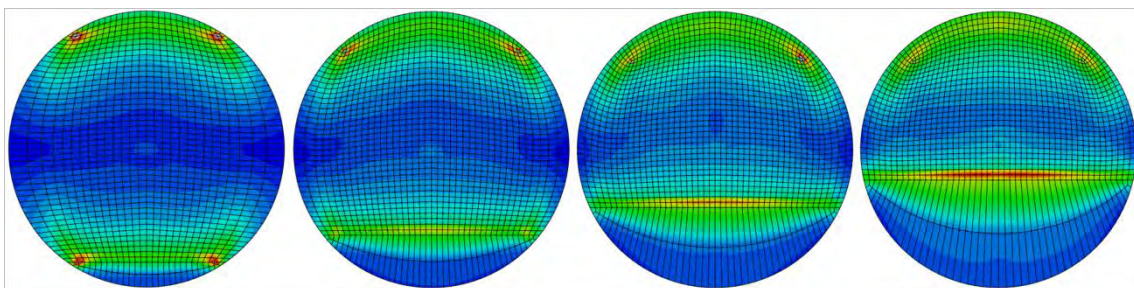


Figura 6.22 Representación de la tensión según el criterio de Von Mises en el primer incremento del *step* para los distintos tamaños de fisura estudiados. De izquierda a derecha $a/D = 0.1$, $a/D = 0.2$, $a/D = 0.3$ y $a/D = 0.4$

Además en esta figura, siendo las zonas azuladas valores de tensión nulos, se puede observar como la fisura está abierta puesto que no soporta tensión. Esta comprobación se puede hacer de forma más completa utilizando la variable S33 ya que nos ofrece valores de tensiones de tracción y compresión.

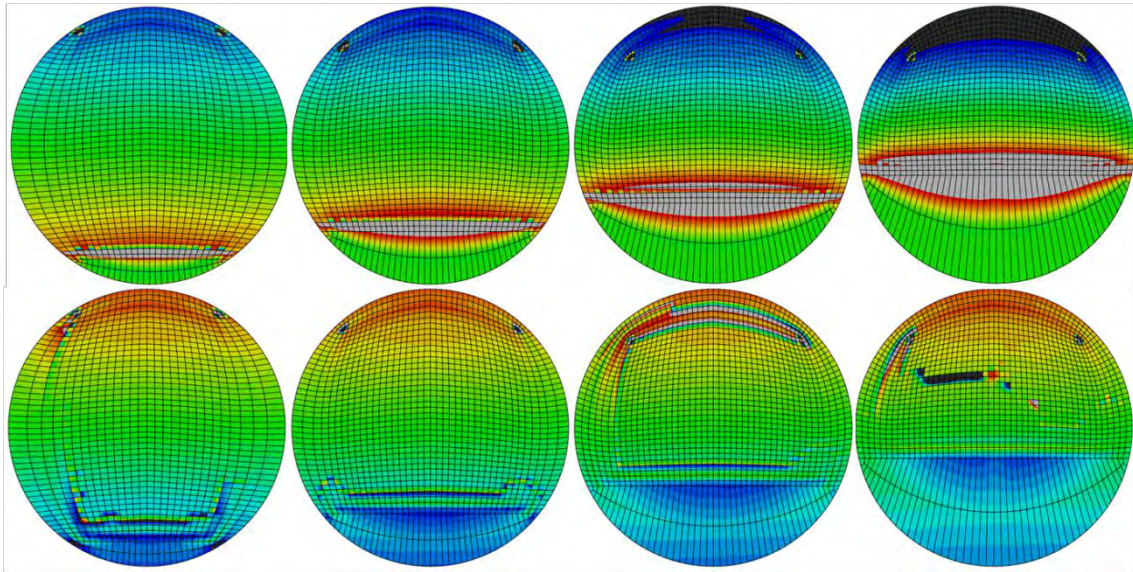


Figura 6.23 Tensiones de tracción y compresión en la sección fisurada para los distintos tamaños de fisura estudiados en el caso de fisura abierta (arriba) y cerrada (abajo)

En este caso los tonos rojizos representan tensiones de tracción, los azulados de compresión y los verdes intensos tensiones nulas. Con el objetivo de comparar todas las secciones en las mismas condiciones se limitan los valores máximo y mínimo de tensión para que sean iguales en todos los casos. Por ello aparecen zonas grises claras donde se supera el valor impuesto como máximo a tracción y grises oscuros en el caso de ocurrir lo propio con el límite de compresión establecido.

En las secciones de la fila superior se muestran los valores de tensión normal S_{33} en el primer incremento del *step* para las distintas fisuras estudiadas. Se comprueba como las tensiones en la parte fisurada son nulas ya que no existe contacto entre las caras de la fisura. Además conforme la fisura crece, tanto las tensiones de tracción en el frente de grieta como de compresión en las fibras superiores se incrementan puesto que la sección efectiva del eje se reduce. En la fila inferior, en cambio, se representa la misma variable pero en el primer incremento en que la fisura está completamente sometida a compresión, es decir, cerrada. En este caso sí se observa como la zona fisurada si transmite esas tensiones de compresión y, como la zona fisurada también trabaja, la distribución de tensiones es similar para los distintos tamaños de fisura.

Una última consideración importante en cuanto a la forma del desarrollo de la fisura consiste en el hecho de que, para un eje en rotación ésta crece en el sentido contrario al giro. En el caso del presente proyecto se produce al contrario. Se explica por qué. En un eje real, la fisura pasa por todas las posiciones perimetrales posibles durante cada ciclo (ver Figura 3.16 y Figura 3.17). Sin embargo, en el modelo utilizado la fisura siempre se mantiene en la parte inferior del eje siendo las cargas sinusoidales las que permiten que se vea sometida a los distintos estados de carga. Por tanto esta diferencia en el sentido de propagación es achacable a la definición de las cargas y los resultados son extrapolables al caso real.

El final de un ensayo de fatiga sobre un eje de aluminio (que no presenta límite de fatiga) consiste en la rotura frágil de la sección. Esto se produce cuando la sección fisurada no es capaz de soportar los esfuerzos a los que se ve sometida produciendo

un crecimiento acelerado e inestable de la fisura hasta la fractura. Sin embargo en los modelos estudiados no se alcanza la degradación total de los elementos. En este sentido se comprobaron distintos tamaños de fisura, valores de energías de fractura, criterios de inicio de daño, incluso aquellos basados en desplazamientos en el frente de grieta y no en tensiones. Ninguna de las alternativas estudiadas ofreció resultados satisfactorios en esta dirección. Estudios en esta línea (76) indican que los ciclos de carga necesarios para observar este comportamiento son muy elevados, y aunque en el caso del presente trabajo el proceso de crecimiento se desarrolla de forma acelerada no se alcanzan esos niveles sin que el *job* aborte.

En cuanto a la utilización de ambas aproximaciones, la MFEL destaca sobre los CZM en relación a la facilidad de convergencia del problema particular que en este Trabajo se estudia. Se consigue mantener el crecimiento de la fisura durante mayor número de ciclos sin tener que modificar en exceso las propiedades del material. Sin embargo, es necesario subrayar la importancia de utilizar valores apropiados tanto de criterios de inicio de daño como de evolución del mismo (energías de fractura para los CZM y tasas de liberación de energía en la aplicación de la MFEL) para obtener resultados que puedan ser sin duda utilizados en la predicción del desarrollo de este tipo de grietas mediante XFEM.

En la Figura 6.24 se presenta la evolución del frente de grieta de una fisura inicial de frente recto presente en un eje rotativo sometido a flexión según Toribio (78) utilizando la Ley de Paris- Erdogan (32).

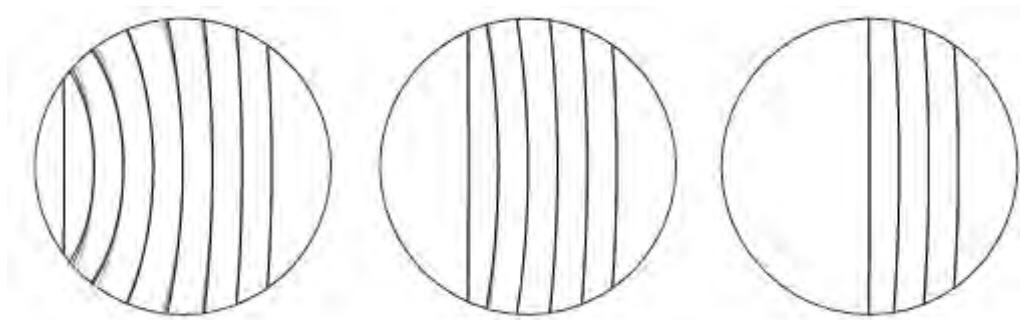


Figura 6.24 Desarrollo del frente de grieta de fisuras de frente casi-recto sometidas a flexión alternante (78)

Se observa que el frente de grieta se vuelve, en mayor o menor medida según el tamaño inicial de la fisura, semi-elíptico. Este sería el modelo de referencia del modelo desarrollado en este trabajo. Sin embargo, los problemas y dificultades encontrados durante el proceso de modelización del daño en los elementos enriquecidos así como la convergencia de los distintos casos, no permiten alcanzar un desarrollo similar más allá de los primeros estadios en algunos casos concretos. Ver los primeros incrementos de la Figura 6.5 y de la Figura 6.7.

7

Planificación y presupuesto

7.1 Planificación

Una característica esencial de cualquier proyecto, independientemente del ámbito en que se desarrolle, es su complejidad. Esta complejidad hace recomendable una planificación adecuada para cumplir los requisitos de costes y plazos. La división en tareas del mismo permite mejorar esa planificación y realizar un adecuado control temporal y de recursos durante el desarrollo del proyecto.

Por ello, en la redacción de este Trabajo, se considera importante presentar la planificación temporal de las distintas tareas en que se ha considerado apropiado dividir el proyecto.

Se presenta a continuación el diagrama de Gantt del Trabajo realizado en Microsoft Project diferenciando las distintas tareas realizadas organizadas según áreas de trabajo así como su secuenciación temporal y relaciones de precedencia entre ellas.

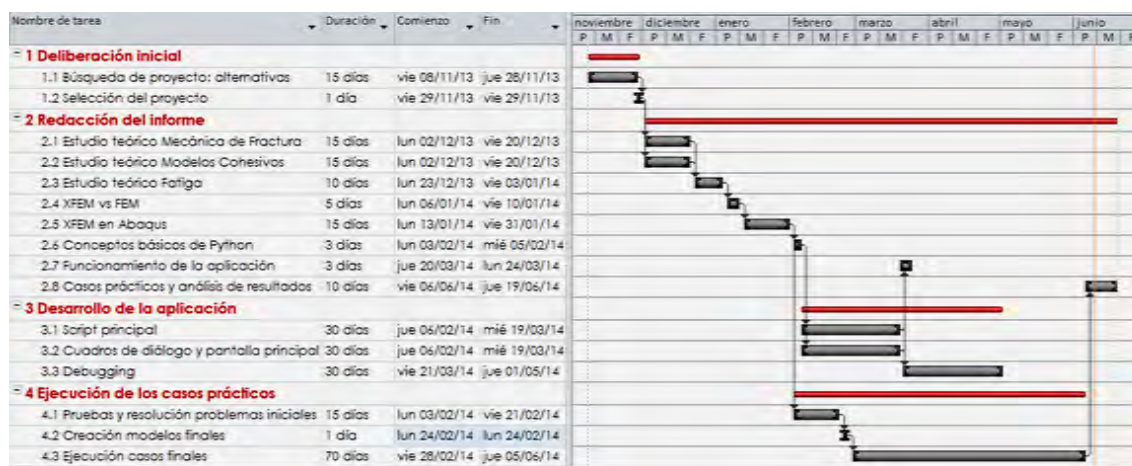


Figura 7.1 Diagrama de Gantt del proyecto

Tabla 7.1

Planificación de Tareas				
Nombre de la tarea	Fecha de comienzo	Fecha de finalización	Horas dedicadas	Días dedicados
Deliberación inicial				
• Búsqueda de proyecto: alternativas	8/11/13	28/11/13	15	15
• Selección del proyecto	29/11/13	29/11/13	5	1
Redacción del informe				
• Estudio teórico Mecánica de Fractura	2/12/13	20/12/13	60	15
• Estudio teórico Modelos Cohesivos	2/12/13	20/12/13	60	15
• Estudio teórico Fatiga	23/12/13	03/01/14	80	10
• XFEM vs FEM	06/01/14	10/01/14	30	5
• XFEM en Abaqus	13/01/14	31/01/14	80	15

• Conceptos básicos de Python	03/02/14	05/02/14	20	3
• Funcionamiento de la aplicación	20/03/14	24/03/14	20	3
• Casos prácticos y análisis de resultados	06/06/14	19/06/14	80	10
Desarrollo de la aplicación				
• Script principal	06/02/14	19/03/14	120	30
• Cuadros de diálogo y pantalla principal	06/02/14	19/03/14	120	30
• Debugging	21/03/14	01/05/14	20	30
Ejecución de los casos prácticos				
• Pruebas y resolución de problemas iniciales	03/02/14	21/02/14	60	30
• Creación de modelos finales	24/02/14	24/02/14	5	1
• Ejecución de los casos finales	28/02/14	05/06/14	140	70
Horas totales			915	

7.2 Presupuesto

En el presupuesto del proyecto se tendrán en cuenta principalmente la amortización de los equipos y licencias de *software* utilizadas así como los honorarios de los trabajadores involucrados en la elaboración de presente Trabajo.

7.2.1 Amortización de equipos y licencias de software

Para calcular la amortización se utiliza la ecuación 7.1 a continuación.

$$C_{amort} = \frac{A}{B} \cdot C \cdot D$$

7.1

En ella A representa el número de meses en que el equipo ha sido utilizado, B el periodo de depreciación, C el coste del equipo y D el porcentaje de utilización (habitualmente 100%).

En la **Tabla 7.2** se presenta las amortizaciones en base a estos conceptos.

Tabla 7.2

Costes de amortización					
Equipo	A(meses)	B(meses)	C(€)	D(%)	$C_{amort}(€)$
Ordenador personal	6	12	1500	100	750
Ordenador laboratorio	4	12	1500	100	500
Licencias de software	A(meses)	B(meses)	C(€)	D(%)	$C_{amort}(€)$
Abaqus 6.11	6	12	33650	100	11217
Paquete Microsoft Office	6	12	150	100	75
Notepad	6	-	-	100	0
Total					12542

7.2.2 Honorarios de personal

En la **Tabla 7.3** se presenta la información contable a este respecto.

Tabla 7.3

Costes de personal				
Personal	Cargo	Dedicación (h)	Coste (€/h)	$C_{pers}(€)$
Tutora	Ingeniero	100	40	4000
Autor	Estudiante	915	15	13725
Total				17725

Por tanto los costes totales del proyecto ascienden a:

$$C_{total} = C_{amort} + C_{pers} = 12542€ + 16000€ = 30267€$$

8

Conclusiones y desarrollos futuros

8.1 Resumen final y conclusiones

En el presente Trabajo Fin de Grado se ha analizado, por primera vez, la propagación de fisuras en ejes giratorios en condiciones cuasiestáticas mediante el Método de los Elementos Finitos eXtendido (XFEM), para lo que se ha desarrollado un modelo numérico tridimensional parametrizado mediante el código comercial de elementos finitos Abaqus/Standard.

Para conseguir este objetivo ha sido necesario realizar una amplia revisión bibliográfica para conocer en profundidad la mecánica del daño en ejes rotatorios fisurados, así como para comprender el funcionamiento de las herramientas que proporciona Abaqus en el seno del XFEM.

Se ha analizado la propagación de fisuras en ejes mediante XFEM, en función de la profundidad de las mismas. Para ello se ha utilizado un modelo parametrizado creado a tal fin mediante una aplicación creada en el entorno de Abaqus utilizando el lenguaje de programación *Python*. Además, se han comparado entre sí los datos ofrecidos por las dos alternativas que proporciona Abaqus (la de los modelos cohesivos CZM y la que se basa en la Mecánica de Fractura Elástico Lineal LEFM), así como con otros resultados que se pueden encontrar en la literatura.

Como resumen final del trabajo realizado se puede concluir que aunque la forma del frente de grieta no se corresponde en la mayoría de los casos con la obtenida por otros trabajos de la literatura, calculadas mayoritariamente utilizando la Ley de Paris-Erdogan, esto es debido a varios factores entre los que cabe destacar: simular un proceso dinámico mediante un modelo cuasiestático, ya que Abaqus sólo permite utilizar XFEM en condiciones estáticas; alejamiento del modelo desarrollado de las condiciones reales de funcionamiento debido a las simplificaciones insalvables en los modelos de elementos finitos, como puede ser el caso de la geometría o de las condiciones de carga; optimización de la forma y tamaño de malla, que no ha sido posible mejorar más debido a que menor tamaño de malla hubiera supuesto aumentar de manera considerable el tiempo de cálculo. Teniendo en cuenta que el tiempo medio de simulación por modelo se ha situado en torno a las 250 horas, menores tamaños de malla hubieran sido inviables para la presentación de este Trabajo.

En definitiva, este Trabajo Fin de Grado ha servido como primera aproximación al estudio de propagación de fisuras en modelos XFEM complejos en tres dimensiones, como es el caso de ejes rotatorios, a partir del cual pueden surgir futuros desarrollos encuadrados en la misma línea de investigación.

8.2 Desarrollos futuros

A partir de las conclusiones obtenidas tras la finalización del Trabajo se proponen los siguientes desarrollos futuros:

- Realizar un estudio más pormenorizado de los valores adecuados de las energías de fractura o tasas de liberación de energía, según la aproximación utilizada, ya que el valor de estos parámetros es crucial para obtener resultados que puedan ser comparables a los experimentales y, por tanto, permitan en un futuro predecir el comportamiento de estas fisuras de modo eficaz mediante el XFEM.
- Mejorar tanto el tamaño como la densidad de la malla para evitar los problemas que aparecen en el desarrollo inicial de las fisuras motivados por la anómala distribución de tensiones en el frente de grieta. Aunque se han realizado estudios de optimización del mallado en ejes, la introducción del XFEM requiere de un nuevo proceso de optimización. En el caso de usar el MEF tradicional, la malla se refina en la zona del frente de grieta. En cambio, cuando se usa el XFEM, es necesario extender esta malla fina a toda la región no fisurada ya que en toda ella puede crecer la fisura. Este hecho es especialmente importante en el caso de fisuras pequeñas ya que la región no fisurada alcanza casi la totalidad de la sección con lo que el número de elementos aumenta considerablemente.
- Investigar nuevos sistemas que permitan simular más fielmente los estados de carga y condiciones de contorno, ya que el utilizado en este Trabajo no consigue reproducir con exactitud el giro del eje y el proceso de apertura y cierre de la fisura.
- Realizar un estudio similar considerando frentes de fisura semi-elípticos o semi-circulares.
- Aprovechar la potencia del XFEM en la nucleación de grietas, y no solo en su posterior propagación. Para ello se pueden utilizar geometrías de ejes con concentradores de tensiones, tales como chaveteros, radios de acuerdo, entallas, etc.

Bibliografía

1. *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners.* **Inglis, C. E.** 1913.
2. *The phenomena of rupture and flow in solids.* **Griffith, A.** 1920, Philosophical Transactions, págs. 163-198.
3. *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate.* **Irwin, G.** 1957, Journal of Applied Mechanics, págs. 361-364.
4. **J.L. Arana & J.J. González.** *Mecánica de Fractura.* s.l.: Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, 2002.
5. *Yielding of steel sheets containing slits.* **Dugdale, D. S.** 1960, Journal of Mechanics and Physics of Solids, págs. 100-104.
6. **Wells, A.A.** *Instable Crack Propagation in Metals: Cleavage and Fast Fracture, Proceedings of the Crack Propagation Symposium, Vol 1, Paper 84.* Cranfield : s.n.
7. *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture.* **Barenblatt, G. I.** 1962, Advances in Applied Mechanics, págs. 55-129.
8. *Progressive delamination using interface elements.* **Y. Mi, M. A. Crisfield, G. A. Davies & H. B. Hellweg.** 1998, Journal of Composite Materials, págs. 1246-1272.
9. *A simple technique for avoiding convergence problems in finite element simulations of crack nucleation and growth on cohesive interfaces.* **Y. F. Gao & A. F. Bower.** 2004, Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, pág. 453.
10. *Stable numerical simulations of propagation of complex damages in composite structures under transverse loads.* **N. Hu, Y. Zeng, H. Fukunaga, H. H. Wang & A. M. Elmarakbi.** 2006, Composites Science and Technology, págs. 752-765.
11. *Interface element including point-to-surface constraints for three-dimensional problems with damage propagation.* **J. Gonçalves, M. de Moura, P. de Castro & A. Marques.** 1999, Engineering Computations, págs. 28-47.
12. *Cohesive Zone Models: A Critical Review of Traction-Separation Relationships Across Fracture Surfaces.* **Kyoungsoo Park & Glaucio H. Paulino.** 2013, Appl. Mech. Rev.
13. *Numerical Simulations Of Fast Crack-Growth In Brittle Solids.* **X. P. Xu & A. Needleman.** 1994, Journal Of The Mechanics And Physics Of Solids, págs. 1397-&.
14. *Numerical analysis of indentation-induced cracking of brittle coatings on ductile substrates.* **A. Abdul-Baqi & E. Van der Giessen.** 2002, International Journal of Solids and Structures, págs. 1427-1442.
15. *Über Treibseile am Harz.* **Albert, W. A. J.** 1837, Archiv für Mineralogie, Geognosie, Bergbau und Hüttenkunde, Vol. 10, págs. 215-234.

16. *On the causes of the unexpected breakage of the journals of railway axles, and on the means of preventing such accidents by observing the law of continuity in their construction.* **Rankine, W. J. M.** [ed.] Institution of Civil Engineers. London : s.n., 1842, Minutes of Proceedings, Vol. 2, págs. 105-108.
17. *On the fatigue and consequent fracture of metals.* **Braithwaite, F.** s.l. : Institution of Civil Engineers, 1854, Minutes of Proceedings, Vol. 13, págs. 463-474.
18. *Versuche zur Ermittlung der auf die Eisenbahnwagenachsen einwirkenden Kräfte und die Widerstandsfähigkeit der Wagen-Achsen.* **Wöhler, A.** 1860, Zeitschrift für Bauwesen, Vol. 10, págs. 583-616.
19. *The Fracture of Metals Under Repeated Alterations of Stress.* **Ewing & Humfrey.** 1903, Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. 221, págs. 241-253.
20. *The exponential law of endurance tests.* **Basquin, O. H.** s.l. : Proc. Annual Meeting. American Society for Testing Materials, 1910. Vol. 10, págs. 625-630.
21. **R.Avilés.** *Análisis de Fatiga en Máquinas.* Madrid : Thomson, 2005.
22. *Die Lebensdauer von Kugellagern.* **Palmgren, A.** Berlin : s.n., 1924, Verfahrenstechnik, Vol. 68, págs. 339-341.
23. *Cumulative damage in fatigue.* **Miner, M.A.** 1945, Journal of Applied Mechanics, Vol. 67, págs. A159-A164.
24. *A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal.* **Jr., L.F. Coffin.** 1954, Trans. ASME, Vol. 76, págs. 931-950.
25. *Behaviour of materials under conditions of thermal stress.* **Manson, S.S.** [ed.] NACA TN-2933. 1954, National Advisory Committee for Aeronautics.
26. **Marin, J.** *Mechanical Behaviour of Engineering Materials.* New York : Prentice-Hall, 1962.
27. **Juvinall, C.** *Stress, Strain and Strength.* New York : McGraw-Hill, 1976.
28. *Prediction of Stochastic Endurance Strength.* **C.R.Mischke.** 1, s.l. : Trans. of ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, 1987, Vol. 109.
29. **R.G. Budynas & J.K. Nisbett.** *Shigley's Mechanical Engineering Design.* New York : McGraw-Hill, 2008.
30. *A statistical distribution function of wide applicability.* **Weibull, W.** [ed.] Trans. ASME. 1951, Journal of Applied Mechanics, Vol. 73, págs. 293-297.
31. **Abella, M.B. Muñoz.** *Apuntes de la asignatura: Mecánica de Máquinas.* s.l. : Universidad Carlos III de Madrid.
32. *A critical analysis of crack propagation laws.* **P. Paris & F. Erdogan.** 1963, Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering , págs. 528-534.

33. *The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7076-T6 Aluminium.* **Walker, E.K.** 1970, Effects of environment and complex load history on fatigue life.
34. *Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures.* **R. Forman, V. Kearney & R. Engle** . 1967, Journal of Basic Engineering, págs. 459-464.
35. *Fatigue Crack Closure Under Cyclic Tension.* **Elber, W.** 1970, Engineering Fracture Mechanics, págs. 37-45.
36. *An Experimentalist's View of the Surface Flaw Problem.* **Collipriest, J.E.** 1972, The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions, págs. 43-61.
37. *Shape change of surface cracks in round bars under cyclic axial loading.* **Carpinteri, A.** 1993, International Journal of Fatigue , págs. 21-26.
38. *The application of fracture mechanics to surface cracks in shafts.* **T. Lorentzen, N. Kjaer & T. Henriksen.** 1986, Engineering Fracture Mechanics , págs. 1005-1014.
39. *Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading.* **A. Kobayashi & R.Shahand.** 1971, Engineering Fracture Mechanics, págs. 71-96.
40. *Part-circular surface cracks in round bars under tension, bending and twisting.* **A. Levan & J. Royer.** 1993, International Journal of Fracture , págs. 71-99.
41. *Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending.* **C. Shin & C. Cai.** 2004, International Journal of fracture, págs. 239-264.
42. *Growth behavior of surface cracks in the circumferential plane of solid and hollow cylinders.* **R. Forman & V. Shivakumar.** 1986, Fracture Mechanics, págs. 59-74.
43. *Semi-elliptical fatigue crack growth under rotating or reversed bending combined with steady torsion .* **M. Fonte & M. Freitas.** 1997, Fat. Fract. Eng. Mat., págs. 895-906.
44. *A survey of the dynamic behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack.* **Gasch, R.** 1993, Journal of Sound and Vibration, págs. 313-332.
45. *Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack rotor.* **I. Mayes & W. Davies,** . 1984, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reability in Design, págs. 139-145.
46. *Transient response and breathing behaviour of a cracked jeffcott rotor.* **A. Darpe, K. Gupta & A. Chawla.** 2004, Journal of Sound and Vibration, págs. 207-243.
47. *Some remarks on breathing mechanism, on non-linear effects and on slant and helicoidal cracks.* **N. Bachschmid, P. Pennacchi & E. Tanzi.** 2008, Mechanical Systems and Signal Processing , págs. 879-904.
48. **Rubio, P.** *Tesis Doctoral.* Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Carlos III de Madrid. Leganés : s.n., 2014. Factor de Intensidad de Tensiones en fisuras elípticas con mecanismo de apertura y cierre en ejes giratorios.

49. *Simplified model for the fatigue growth analysis of surface cracks in round bars under mode I.* **N. Couroneau & J. Royer.** 1998, International Journal of Fatigue, págs. 711-718.
50. *A critical review of stress intensity factor solutions for surface cracks in round bars subjected to tension loading.* **J. Toribio, N. Álvarez, B. Gonzalez & J. C. Matos.** 2009, Engineering Failure Analysis, págs. 794-809.
51. *Shape growth simulation of surface cracks in tension fatigued round bars.* **X. Lin & R. Smith.** 1997, International Journal of Fatigue, págs. 461-469.
52. *Stress intensity factors for circumferential surface cracks in pipes and rods.* **J. Newman & I. Raju.** 1986, Fracture Mechanics, págs. 789-805.
53. *Analysis of fatigue crack growth on a cracked shaft.* **Y. Shih & J. Chen.** 2002, International Journal of Fracture , págs. 477-485.
54. *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations.* **Courant, R.** 1943, Bulletin of the American Mathematical Society, págs. 1-23.
55. *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis.* **Clough, R.W.** Pittsburgh, PA : American Society of Civil Engineers, 1960. 2nd conference on Electronic Computation. págs. 345-378.
56. *Stiffness and deflection analysis of complex structures.* **R.W. Clough, M.J. Turner, H.C. Martin & L.J. Topp.** 1956, Journal of Aeronautical Sciences, págs. 805-824.
57. *Some aspects of recent contributions to the mathematical theory of finite elements.* **Oden, J.T.** 1972, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design.
58. **Przemieniecki, J.S.** *Theory of Matrix Structural Analysis.* New York : Mc Graw-Hill, 1968.
59. **O.C. Zienkiewicz & G. Hollister .** *Stress Analysis.* London : John Wiley, 1966.
60. **O.C. Zienkiewicz & Y.K. Cheung .** *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics.* London : Mc Graw-Hill, 1967.
61. **O.C. Zienkiewicz & R.L. Taylor.** *El método de los Elementos Finitos.* Barcelona : Mc Graw-Hill, 1994.
62. **Lizarza, J.T. Celigüeta.** *Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural.* [ed.] Escuela Superior de Ingenieros de San Sebastián. Tercera Edición. San Sebastián : s.n., 2008. ISBN: 84-921970-2-1.
63. *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing.* **T. Belytschko & T. Black.** 1999, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45, págs. 601-620.
64. *A finite element method for crack growth without remeshing.* **N. Moës, J. Dolbow & T. Belytschko.** 1999, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46, págs. 131-150.
65. **Dassault Systèmes.** Abaqus/CAE User's Manual. 2011.

66. *Extended finite element method for three dimensional crack modelling*. **N. Sukumar, N. Moës, B. Moran & T. Belytschko**. 2000, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 48, págs. 1549-1570.
67. *New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks*. **G. Zu & T. Belytschko**. 2003, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 57, págs. 2221-2240.
68. *Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements*. **G. Ventura, E. Budyn & T. Belytschko**. 2003, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 58, págs. 1571-1592.
69. *Extended finite element method for fretting fatigue crack propagation*. **E. Giner, N. Sukumar, F. Denia & F. Fuenmayor**. 2008, International Journal of Solid and Structures, 45, pág. 5675.
70. **Dassault Systèmes**. Abaqus Analysis User's Manual. 2011.
71. *A Method for Dynamic Crack and Shear Band Propagation with Phantom Nodes*. **J. H. Song, P. M. A. Areias, & T. Belytschko**. 2006, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 67, págs. 868-893.
72. *The Simulation of Dynamic Crack Propagation using the Cohesive Segments Method*. **J. J. C. Remmers, R. de Borst, & A. Needleman**. 2008, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 56, págs. 70-92.
73. *Mixed mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials*. **P. P. Camanho & C. G. Davila**. 2002, págs. 1-37.
74. *3D mixed-mode delamination fracture criteria - An experimentalist's perspective*. **Reeder, J. R.** 2006. 21st Technical Conference.
75. *Measurement of Mixed-Mode Delamination Fracture Toughness of Unidirectional Glass/Epoxy Composites with Mixed-Mode Bending Apparatus*. **M. L. Benzeggagh & M. Kenane**. 1996, Composites Science and Technology, 56 , págs. 439-449.
76. *Computational modeling of mixed-mode fatigue crack growth using extended finite element methods*. **Xu, Y., Yuan, H.** [ed.] University of Wuppertal Department of Mechanical Engineering. 2, Wuppertal, Germany : s.n., 2009, International Journal of Fracture, Vol. 159, págs. 151-165.
77. *Extended Finite Element Method (XFEM) applied to aircraft duralumin spar fatigue life estimation*. **D. Petrašinović et al.** [ed.] Faculty of Mechanical Engineering University of Belgrade. 3, Belgardo, Serbia : s.n., 2012, Technical Gazette, Vol. 19, pág. Technical Gazette.
78. *Numerical modelling of cracking path in round bars subjected to cyclic tension and bending*. **J. Toribio, J.C. Matos, B. González, J. Escudra**. 2014, International Journal of Fatigue, págs. 20-27.
79. *The Significance of Fatigue Crack Closure*. **Elber, W.** 1971, Damage Tolerance in Aircraft Structures, págs. 230-242.

